1.1. Введение

Задачи на равномерное прямолинейное движение задаются и решаются в школе, начиная чуть ли не с младших классов. Необходимые для решения подобных задач теоретические знания столь просты и общеизвестны, что не требуют систематического изложения.

Соотношения, которые следует помнить

1	$\langle v\rangle=\frac{\Delta x}{\Delta t}$	<v>- средняя скорость.
2	$v_\Sigma=v\pm u$	Классический закон сложения скоростей при движении вдоль одной прямой: • v_E - скорость тела относительно неподвижного наблюдателя • v - скорость тела относительно движущейся системы отсчета • u - скорость движения системы отсчета относительно наблюдателя.

Представляется целесообразным начать первое занятие не с обсуждения и доказательства общеизвестных фактов, а разбора примеров несколько неожиданных задач, для решение которых не требуется практически ничего, кроме здравого смысла и умения производить простейшие математические выкладки.

1.2. Как следует решать задачи по физике и оформлять свои решения

Попытайтесь решить простейшую задачу:

Автомобиль проехал первую треть прямолинейного пути со средней скоростью v_1, вторую треть - со средней скоростью v_2, последнюю - со средней скоростью v_3. Чему равна средняя скорость автомобиля на всем пройденном пути?

БУДЬТЕ БДИТЕЛЬНЫ!

- Если Вы нашли эту задачу слишком простой и недостойной внимания, это значит, что Вы либо очень хорошо выучили кинематику (переходите к следующему разделу лекции), либо слишком доверчивы и попались на "провокацию" (в этом случае дальнейшие пояснения - специально для Вас).
- Ответ $\langle v\rangle=\frac{1}{3}(v_1+v_2+v_3)$ не является правильным.
- Если на экзамене Вам предлагают смешную своей простотой задачу - НАСТОРОЖИТЕСЬ. Так ли она проста, как кажется.

Правильно решить любую задачу Вам помогут хорошо известные со школы правила оформления решения:

- Прежде, чем решать задачу, ПОЛЕЗНО познакомиться с ее условием.
- Нет лучшего способа познакомиться с условием задачи, кроме как кратко записать его под магическим словом "ДАНО".
- Обязательно напишите, что нужно найти в процессе решения задачи: если Вы "с испугу" отыскали не ту величину, которую требует найти условие, на экзамене задача не будет считаться решенной.
- Под словом "РЕШЕНИЕ" сделайте подробный рисунок, на котором укажите все данные величины и величины, которые нужно найти. Наглядность всегда помогает.
- Все приводимые в решении формулы поясняйте краткими текстами, оправдывающими применение использованных Вами физических законов. Это поможет Вам не ошибиться, выдав "желаемое за действительное". Помните, что все законы физики имеют ограниченную области применимости. Использование этих законов должно сопровождаться обоснованием корректности их использования.

Математические выкладки при решении физических задач можно не пояснять за свои

знания математики вы будете иметь возможность отчитаться на другом

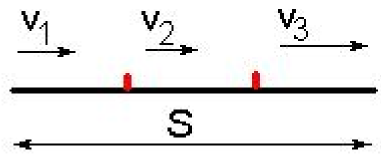
экзамене. Преподавателя физики (и любого физика) удивить знаниями по математике

очень трудно.

- Получив ответ в общем виде, подумайте, всегда ли он справедлив. Изложите кратко в ходе решения результаты Ваших раздумий.
- В конце решения задачи напишите обстоятельный ответ, подводящий итог Вашему маленькому "теоретическому исследованию".
- Если в задаче данные приведены "в числах", считается хорошим тоном получить ответ в общем ("буквенном") виде и только после этого заниматься арифметикой.

Пример оформления решения задачи

(В дальнейшем для краткости в электронном конспекте будет использоваться сокращенное оформление задач)

Дано:	**Решение:**	
		
$\frac{S}{3} \to v_1$ $\frac{S}{3} \to v_2$ $\frac{S}{3} \to v_3$	1 $\langle v \rangle = \frac{S}{T}$	(определение средней скорости)
	2 $T = t_1 + t_2 + t_3$	(время движения по всему пути)
	3 $\begin{cases} t_i = \frac{S}{3v_i} \\ i = 1,2,3 \end{cases}$	(по определению средней скорости для каждого участка).
	4 $\langle v \rangle = \frac{3}{v_1^{-1} + v_2^{-1} + v_3^{-1}}$	(подстановка (2) и (3) в (1)).
$\langle v \rangle = ?$	**Ответ:** средняя скорость автомобиля равна $\langle v \rangle = \frac{3}{v_1^{-1} + v_2^{-1} + v_3^{-1}}$	

1.3. Задача на классический закон сложения скоростей

Два пловца соревнуются в плавании по следующим правилам: один проплывает дистанцию "вперед и назад" по неподвижной воде озера, а другой - аналогичную дистанцию "вниз и вверх" по течению равномерно текущей реки. Справедливые ли эти соревнования? Если нет, кто находится в более выгодном положении?

Решение:

1	V - скорость пловца относительно воды U - скорость реки S - длина дистанции	Обозначения

2	$u \ge v$ - соревнования заведомо нечестные.	Плывший по реке участник вообще не вернулся к старту.
3	$t_o = \dfrac{2S}{v} = \dfrac{2Sv}{v^2}$	Время по озеру.
4	$t_r = \dfrac{S}{v-u} + \dfrac{S}{v+u} = \dfrac{2Sv}{v^2-u^2}$	Время по реке (при нахождении скорости относительно берега использован закон сложения скоростей).
5	$v^2 \ge v^2 - u^2 \Rightarrow \quad t_0 \le t_r$	Соревнования нечестные, пловец по озеру имеет преимущество.

1.4. Классический эффект Доплера

В простейшем случае движения вдоль одной прямой классический (нерелятивистский) эффект Доплера может быть проиллюстрирован с помощью следующей задачи:

Бабушка и внучка собирают яблоки: бабушка кладет на ленту транспортера, движущегося со скоростью u, а стоящая на другом конце внучка их ест. С какой частотой внучка будет получать яблоки, если бабушка кладет их с частотой n_0 и при этом движется вдоль конвейера по направлению к внучке со скоростью v?

Решение:

1	$T_0 = \dfrac{1}{\nu_0}$	Время, через которое бабушка кладет яблоки на конвейер.
2	$u' = u - v$	Скорость удаления яблок от бабушки
3	$\lambda = u' T_0 = (u-v) T_0$	Расстояние между яблоками
4	$T' = \dfrac{\lambda}{u} = \left(1 - \dfrac{v}{u}\right) T_0$	Время, через которое внучка получает яблоки.
5	$\nu' = \dfrac{1}{T'} = \dfrac{\nu_0}{1 - v/u}$	Частота получения яблок внучкой

$$\nu' = \frac{1}{T'} = \frac{\nu_0}{1 - v/u},$$

Ответ:

в случае v=u внучка получит одновременно все яблоки вместе с бабушкой, в случае v>u внучка будет получать яблоки о обратном порядке по отношению к тому, как бабушка их клала на конвейер.

Рассмотренный эффект изменения частоты принимаемого сигнала при движении источника или приемника хорошо известен в акустике и в оптике. В последнем случае выведенная формула оказывается неточной из-за того, что при скоростях, сравнимых со скоростью света, классический закон сложения скоростей перестает выполняться.

2.1. Одномерное движение

Одномерным называется движение тела, при котором его положение в пространстве может быть полностью охарактеризовано при помощи одной координаты (например, положение поезда можно задать, указав расстояние вдоль железнодорожного полотна до станции отправления). Прямолинейное движение является важнейшим частным случаем одномерного. При движении тела его координата изменяется во времени, на языке математики это означает, что координата является функцией аргумента t (2.1). Эту функцию можно задать при помощи таблицы, графика, аналитического выражения.

$x = x(t)$	(2.1)	Математическая запись одномерного движения в самом общем случае.

2.2. Скорость

Помимо зависимости координаты от времени движение удобно характеризовать скоростью.

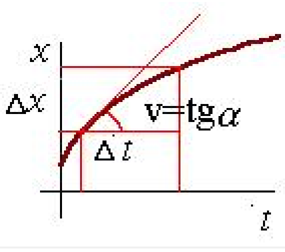
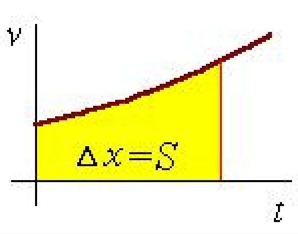
Средней скоростью называют отношение изменения координаты ко времени, за которое произошло это изменение (2.2).

Средняя скорость может быть найдена как тангенс угла наклона секущей к графику *x(t)*.

Еще более удобной характеристикой движения является мгновенная скорость, определяемая как средняя скорость за малый промежуток времени (2.3). Мгновенная скорость может быть найдена как тангенс угла наклона касательной к графику *x(t)*.

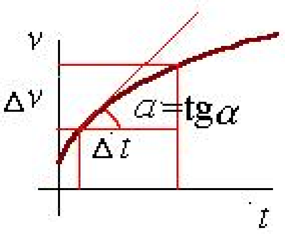
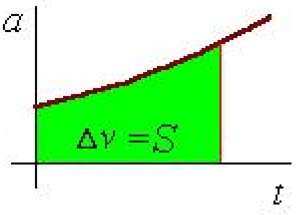
В случае заданной зависимости координаты от времени скорость для любого момента времени всегда может быть найдена. Соответствующую математическую (вычисление отношения приращения функции к бесконечно малому приращению аргумента) называют дифференцированием, а получающуюся в результате дифференцирования функцию называют производной. В современной физике существуют определенные сомнения по поводу того, может ли реальный (а не выдуманный математиками) интервал времени быть сделан сколь угодно малым. Однако, в классической физике обычно занимаются столь большими отрезками длительностей, что указанные сомнения не существенны.

Перемещение (т.е. изменение координаты) тела по заданной зависимости скорости от времени может быть найдено как площадь под графиком v(t). Соответствующая математическая операция носит название вычисления определенного интеграла (2.4). Координата тела в любой момент времени может быть найдена как сумма начальной координаты и перемещения (2.5). Т.о. для нахождения координаты тела в произвольный момент времени по его скорости необходимо знать зависимость скорости от времени и начальную координату.

$\langle v \rangle \equiv \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = tg\alpha_{СЕК}$	(2.2)	Определение средней скорости
$v \equiv \left.\dfrac{\Delta x}{\Delta t}\right\vert_{\Delta t \to 0} \equiv \dot{x} \equiv x' \equiv \dfrac{dx}{dt} = tg\alpha_{КАСАТ}$	(2.3)	Определение мгновенной скорости.
	Рис.2.1	Геометрический смысл скорости
$\Delta x(t) = \int\limits_{t_0}^{t} v(t) \cdot dt = S_{ПОД\ ГРАФИКОМ\ v(t)}$	(2.4)	Определение перемещения по известной скорости.
	Рис.2.2	Определение перемещение тела по зависимости от времени его скорости.
$x(t) = x_0 + \Delta x(t)$	(2.5)	Определение координаты тела по его скорости и начальному положению.

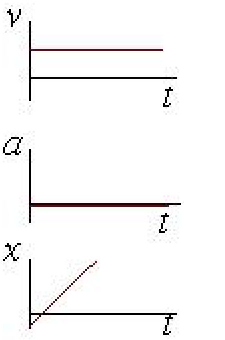
2.3. Ускорение

Подобно координате скорость может изменяться во времени. Подобно тому, как вводились средняя и мгновенная скорости, характеризующие скорость изменения координаты, вводятся характеризующие скорость изменения скорости среднее ускорение (отношение изменения скорости к промежутку времени этого изменения) и мгновенное ускорения (отношение изменения скорости к промежутку времени этого изменения при условии малости этого промежутка). Ускорение связано со скорость точно так же, как скорость связана с координатой (2.6 - 2.10).

$\langle a\rangle \equiv \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t} = tg\alpha_{СЕК}$	(2.6)	Определение среднего ускорения
$a \equiv \left.\frac{\Delta x}{\Delta t}\right\|_{\Delta t\to 0} \equiv \dot{v} \equiv v' \equiv \frac{dv}{dt} = tg\alpha_{КАСАТ}$	(2.7)	Определение мгновенного ускорения.
	Рис.2.3	Геометрический смысл ускорения
$\Delta v(t) = \int_{t_0}^{t} a(t)\cdot dt = S_{ПОД\ ГРАФИКОМ\ v(t)}$	(2.8)	Определение изменения скорости по известному ускорению.
	Рис.2.4	Определение приращения скорости тела по его ускорению
$v(t) = v_0 + \Delta v(t)$	(2.9)	Определение скорости тела по его ускорению и начальной скорости.

2.4. Равномерное прямолинейное движение

Движение тела вдоль прямой с постоянной скоростью называют равномерным прямолинейным движением. При таком движении графиком скорости является прямая, параллельная оси времени. Ускорение (тангенс угла наклона этого графика) в любой момент времени равно нулю. Перемещение тела (площадь под графиком) оказывается линейной функцией времени (2.10).

	Рис.2.5	Графики равномерного прямолинейного движения
$\begin{cases} v(t) = v = const \\ a(t) = 0 \\ x(t) = x_0 + vt \end{cases}$	(2.10)	Равномерное прямолинейное движение

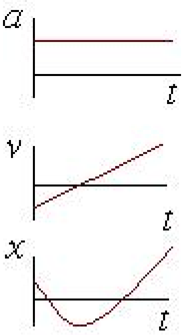
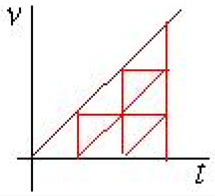
2.5. Равноускоренное прямолинейное движение

Равноускоренным прямолинейным движением называют движение вдоль прямой с постоянным во времени ускорением. При таком движении приращение скорости (как площадь под горизонтальным графиком ускорения) является линейной функцией времени, а перемещение (как площадь под графиком линейной функции) является квадратичной функцией (2.11). Полезно знать следующие свойства равноускоренного движения (2.12):

- · Средняя скорость при равноускоренном движении равна среднему арифметическому между начальной и конечной скоростями (доказать самостоятельно).
- · Перемещение при равноускоренном движении может быть вычислено как отношение разности квадратов конечной и начальной скоростей к удвоенному ускорению (доказать самостоятельно).
- · При равноускоренном движении первоначально покоившегося тела отрезки путей, проходимых телом за равные интервалы времени относятся как ряд последовательных нечетных чисел (док-во на рис. 2.6).

Важным случаем равноускоренного движения является движение тела, брошенного вертикально вверх вблизи поверхности Земли (2.12). Разумеется, приведенные формулы верны только в случае Из графика зависимости скорости от времени видно, что время подъема тела равно времени его падения (рис.2.7):

- · площади под участками графика, соответствующими подъему и спуску тела равны, поскольку равны отрезки пройденных путей;
- · из равенства площадей прямоугольных треугольников следует равенство этих треугольников (док-ть самостоятельно!)
- · из равенства треугольников следует равенство их катетов, представляющих интервалов времени движения

	Рис.2.5	Графики для равноускоренного движения a>0, v0<0, x0>0.
$\begin{cases} a(t) = a = const \\ v(t) = v_0 + at \\ x(t) = x_0 + vt + \dfrac{at^2}{2} \end{cases}$	(2.10)	Прямолинейное равноускоренное движение
$\langle v \rangle = \dfrac{v_k + v_0}{2}$ $\Delta x = \dfrac{v_k^2 - v_0^2}{2a}$ $v_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta x_1 : \Delta x_2 : \Delta x_3 : \ldots = 1:3:5:\ldots$	(2.11)	Свойства равноускоренного движения
	Рис.2.6	Доказательство последнего из свойств (2.11): отрезки пройденных путей численно равны площадям под участками графика v(t), которые, очевидно, относятся между собой как 1:3:5:…

$a(t) = -g$ $v(t) = v_0 - gt$ $x(t) = v_0 t - \dfrac{gt^2}{2}$	(2.12)	Движение тела, брошенного вблизи поверхности Земли вертикально вверх с начальной скоростью v_0. Сопротивление воздуха отсутствует.
	Рис.2.7	Графики зависимости от времени координаты, скорости и ускорения тела, брошенного вертикально верх из точки x=0. Из равенства площадей закрашенных треугольников следует, что время подъема тела равно времени его падения.

2.6. Примеры решения задач

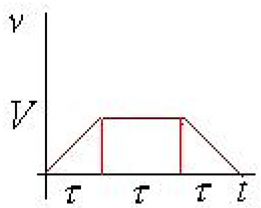
Задача 2.1

Покоившийся автомобиль первую треть времени двигался равноускоренно и достиг скорости V. Вторую треть времени он двигался равномерно с этой скоростью, а последнюю треть- равномерно уменьшал свою скорость до нулевой. Определить среднюю скорость автомобиля.

Указание:

Задачи физики можно решать и графически... Иногда это облегчает процесс решения.

Решение:

	Рис.2.8	График зависимости скорости автомобиля от времени
$\Delta x = S = 2V\tau$	(2.13)	Перемещение автомобиля равно площади под графиком V(t)
$\langle v \rangle \equiv \dfrac{\Delta x}{T} = \dfrac{2}{3}V$	(2.14)	Средняя скорость автомобиля

Ответ: средняя скорость автомобиля равна 2/3 V.

Задача 2.2

В глубокий колодец бросили с интервалом времени T без начальной скорости два камня. На каком расстоянии окажутся камни через время 2T после бросания первого камня?

Указание:

Предложенная задача может быть легко решена с точки зрения наблюдателя, свободно падающего вместе с вторым камнем. В отличие от задач динамики, в кинематических задачах при решении можно использовать неинерциальные системы отсчета.

Решение:

$\begin{cases} H_0 = \dfrac{gT^2}{2} \\ V_0 = gT \end{cases}$	(2.15)	Положение и скорость первого камня в момент начала падения второго.
$\begin{cases} a' = a_1 - a_2 = g - g = 0 \\ V' = V_0 + a't = V_0 = const \\ H = H_0 + V'T = \dfrac{gT^2}{2} + gT^2 = \dfrac{3gT^2}{2} \end{cases}$	(2.16)	Относительные ускорение, скорость и расстояние между камнями.

Ответ: расстояние между камнями окажется равным $\dfrac{3gT^2}{2}$, при условии, что за время Т ни один из камней не достигнет воды.

Задача 2.3

Железнодорожный вагон имеет скорость *v* и движется равнозамедленно с ускорением *-a* в направлении к покоящемуся на расстоянии *L* от него электровозу. С каким постоянным ускорением *A* должен начать двигаться электровоз для того, чтобы между ним и вагоном произошла "мягкая" сцепка (т.е. сцепка с нулевой относительной скоростью)?

Указание:

Если не хоте возиться с математическими трудностями, выбирайте удобные системы отсчета!

Решение:

$A' = -a - A$	(2.17)	Ускорение вагона относительно электровоза
$L = \dfrac{v_k^2 - v_0^2}{2A_/} = \dfrac{0 - v^2}{-2(A+a)}$	(2.18)	Условие остановки вогона относительно электровоза в момент их касания (с точки зрения системы отсчета, связанной с машинистом электровоза)
$A = \dfrac{v^2}{2L} - a$	(2.19)	Ускорение электровоза.
$A > 0 \quad \Rightarrow \quad v > \sqrt{2aL}$	(2.20)	Условие возможности прибытия вагона в точку начального нахождения электрвоза.

если $v < \sqrt{2aL}$ вагон не доедет даже до неподвижного электрвоза,

Ответ:

в противном случае электровоз должен начать двигаться с ускорением

3.1. Основные понятия кинематики

Для описания движения (изменения положения тела в пространстве с течением времени) необходимо иметь способ задания пространственного положения тела и измерения интервалов времени. Для задания положения тела в пространстве необходимо выбрать какое-нибудь материальное тело (тело отсчета) и через одну из его точек (точку отсчета) провести три взаимно перпендикулярные прямые (оси координат) с отложенным масштабом для измерения расстояний. Описанная совокупность носит название системы координат. Добавление к системе координат прибора для измерения времени (часов) превращает ее в систему отсчета.

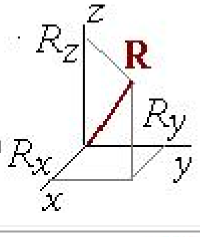
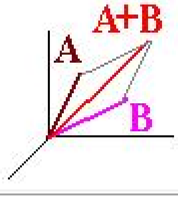
Числа, при помощи которых задается положение тела относительно выбранной системы отсчета называют координатами тела. Для задания положения различных тел может потребоваться различное число координат. Минимальное количество координат, необходимое для исчерпывающего описания положения свободного (т.е. н взаимодействующего с другими объектами) тела в пространстве называется числом степеней свободы этого тела. Чем большим числом степеней свободы обладает тело, чем сложнее оказывается задача описания его движения. Среди макроскопических тел минимальным числом степеней свободы обладают так называемые абсолютно - твердые тела. Такие недеформируемые тела способны перемещаться и вращаться вдоль (вокруг) любого из трех направлений, определяемых осями координат и, следовательно, обладают шестью степенями свободы. При решении многих задач механики могут оказаться малосущественными размеры рассматриваемого тела, относительные перемещения его частей и вращение тела как целого. В этом случае количество рассматриваемых степеней свободы может быть искусственно уменьшено до трех. В результате реальное тело заменяется его математической моделью - материальной точкой ("тело, размерами и формой которого в рамках рассматриваемой задачи можно пренебречь").

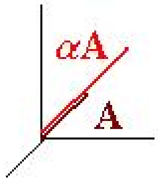
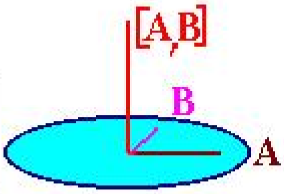
Три координаты, однозначно определяющие положение материальной точки в выбранной системе координат, называют радиус-вектором материальной точки (3.1). Для векторов в математике определяются операции сложения и умножения на число, скалярного умножения и векторного умножения (3.2-3.5). Большинство законов элементарной физики обычно записывают в виде векторных равенств. Такая форма записи более предпочтительна по сравнению со скалярной, поскольку является более компактной и не изменяет свою форму при поворотах системы координат (несмотря на то, что проекции входящих в уравнения векторов при поворотах системы координат разумеется изменяются).

В процессе движения положение материальной точки изменяется во времени и конец радиус-вектора вычерчивает в пространстве кривую, называемую траекторией материальной точки. Перемещением материальной точки за заданный интервал времени называется вектор, равный разности радиус-векторов ее конечного и исходного положений (3.6). В отличие от перемещения пройденный путь является скаляром и численно равен длине дуги пройденного участка траектории.

Отношение перемещения ко времени, за которое это перемещение произошло, называется средней скоростью. Средняя скорость за очень короткий промежуток времени называется мгновенной скоростью (3.6). Средняя скорость направлена по секущей, а мгновенная - по касательной к траектории материальной точки. Отношение приращения скорости ко времени называется средним ускорением, среднее ускорение за короткий интервал времени - мгновенным ускорением (3.7).

Каждое из приведенных векторных равенств можно заменить системой из трех скалярных равенств, получаемых в результате проектирования на оси координат. Произвольное движение тела в пространстве можно рассматривать как совокупность (суперпозицию) трех прямолинейных движений вдоль каждой из осей координат. Т.о. изучение трехмерного движения может быть сведено к анализу трех одномерных движений.

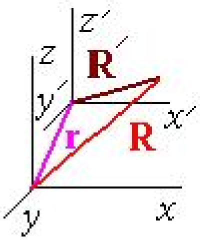
$\begin{pmatrix} R_x(t) \\ R_y(t) \\ R_z(t) \end{pmatrix} \equiv \mathbf{R}(t)$ 	(3.1)	Радиус-вектор материальной точки
$\mathbf{A}+\mathbf{B} \equiv \begin{pmatrix} a_x+b_x \\ a_y+b_y \\ a_z+b_z \end{pmatrix}$ 	(3.2)	Сумма двух радиус-векторов

$\alpha \cdot \mathbf{A} \equiv \begin{pmatrix} \alpha a_x \\ \alpha a_y \\ \alpha a_z \end{pmatrix}$ 	(3.3)	Произведение радиус-вектора на число
$(\mathbf{A},\mathbf{B}) \equiv a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = \lvert\mathbf{A}\rvert \cdot \lvert\mathbf{B}\rvert \cdot \cos\alpha$	(3.4)	Скалярное произведение векторов
$[\mathbf{A},\mathbf{B}] \equiv \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$ 	(3.5)	Векторное произведение двух векторов
$\Delta\mathbf{R} \equiv \mathbf{R}(t+\Delta t) - \mathbf{R}(t)$	(3.6)	Определение вектора перемещения.
$\langle \mathbf{v} \rangle \equiv \frac{\Delta\mathbf{R}}{\Delta t}; \quad \mathbf{v} \equiv \left.\frac{\Delta\mathbf{R}}{\Delta t}\right\rvert_{\Delta t \to 0}$	(3.7)	Средняя и мгновенная скорости.
$\langle \mathbf{a} \rangle = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}; \quad \mathbf{a} \equiv \left.\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}\right\rvert_{\Delta t \to 0}$	(3.8)	Среднее и мгновенное ускорения.

3.2. Движение в пространстве с постоянной скоростью

Простейшим случаем движения в пространстве является движение с постоянной скоростью. Поскольку при таком движении все три проекции скорости на оси координат не изменяются во времени, движение вдоль каждой из осей является равномерным, для каждой проекции может быть записано ранее полученное выражение для координаты тела при равномерном движении (3.9). Совокупность из трех равенств удобнее записать в виде одного векторного соотношения (3.10). Обратите внимание, насколько векторная форма более экономична по сравнению со скалярной!

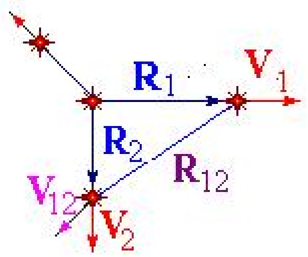
При решении задач кинематики расчеты иногда существенно упрощаются при удачном выборе системы отсчета. При переходе к новой системе отсчета необходимо использовать законы преобразования координат радиус- векторов и перемещений (3.11). Предположение о равенстве интервалов времени в неподвижной и движущейся системах отсчета приводит к следующему из (3.11) закону сложения скоростей (3.12). При выводе закона сложения скоростей нигде не использовался факт движения тел с постоянной скоростью. Из этого следует, что полученный результат справедлив для любого движения.

$\begin{cases} v_x(t) = v_x = const \\ v_y(t) = v_y = const \\ v_z(t) = v_z = const \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = x_0 + v_x t \\ y(t) = y_0 + v_y t \\ z(t) = z_0 + v_z t \end{cases}$	(3.9)	Скалярная форма записи уравнений движения с постоянной скоростью
$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}'(t) + \mathbf{r}(t) \Rightarrow$ $\Delta\mathbf{R} = \Delta\mathbf{R}' + \Delta\mathbf{r}$ 	(3.10)	Закон сложение радиус-векторов и из приращений (перемещений) при переходе в другую систему отсчета.
$\frac{\Delta\mathbf{R}}{\Delta t} = \frac{\Delta\mathbf{R}'}{\Delta t} + \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} \Rightarrow \mathbf{V} = \mathbf{V}' + \mathbf{v}$	(3.11)	Классический закон сложения скоростей.

Пример 3.1. Расширение Вселенной

Данные астрономии свидетельствуют о том, что все звезды удаляются от Солнца со скоростями, пропорциональными расстояниям до этих звезд: V=HR (входящая в выражение для скорости разбегания звезд константа H называется постоянной Хаббла в честь американского астрофизика, открывшего эффект красного смещения галактик). Доказать, что наблюдатель, находящейся на другой звезде, зарегистрирует точно такую - же картину расширения вселенной.

Решение:

$\begin{cases} \mathbf{V}_1 = H\mathbf{R}_1 \\ \mathbf{V}_2 = H\mathbf{R}_2 \end{cases}$	(3.12)	Скорости убегания двух звезд с точки зрения наблюдателя, находящегося в системе отсчета, связанной с Солнцем.
$\mathbf{V}_{21} = \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1$	(3.13)	Скорость звезды 2 с точки зрения наблюдателя, находящегося на звезде 1. Использован классический закон сложения скоростей (3.11).
$\mathbf{V}_{21} = H\mathbf{V}_2 - H\mathbf{V}_1 = H(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1) = H\mathbf{R}_{21}$ 	(3.14)	Закон убегания звезды 2 с точки зрения наблюдателя на звезде 1: закон Хаббла выполняется (звезда 2 движется в направлении прямой, соединяющей ее со звездой 1 со скоростью, пропорциональной расстоянию между звездами). Т.о. закон Хаббла не подразумевает того, что Солнце со своими планетами находится в центре мира.

Пример 3.2. Оптимальная траектория перехвата

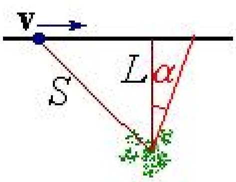
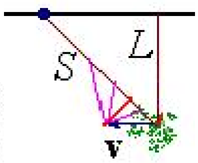
Очень невоспитанный мальчик, возвращаясь домой из школы (плохие мальчики иногда посещают образовательные учреждения) , движется равномерно и прямолинейно со скоростью v. В кустах на расстоянии L от тропинки в кустах сидит папа очень хорошей девочки, портфель который был использован для измерения глубины колодца (см. задачу 2.3). В каком направлении следует бежать папе очень хорошей девочки для того, чтобы, двигаясь с минимальной скоростью, встретиться с очень невоспитанным мальчиком и рассказать ему о том, как можно было измерить глубину колодца без использования портфеля очень хорошей девочки? Чему равна величина этой минимальной скорости? Папа начинает бежать в тот момент, когда расстояние от него до мальчика равно S.

Решение:

Сформулированную задачу можно решить без каких-либо размышлений, воспользовавшись изучаемым в старших классах математическим приемом нахождения экстремума функции (см. левый рисунок). Для этого достаточно получить выражение для скорости движения папы девочки в зависимости от направления его движения, найти производную от скорости по углу и приравнять ее нулю (13.14 - 13.16). Поскольку зависимость скорости от угла явно не удобна для дифференцирования (тригонометрические функции аргумента оказались в знаменателе дроби), кажется разумным вместо минимума дроби искать максимум ее знаменателя. В результате оказывается, что папе следует бежать точно под таким углом к прямой L, какой угол составляет прямая S с дорожкой, по которой движется мальчик (13.17). Неправда ли, очень странный и неожиданный своей простотой результат! Какое подозрительно простое выражение (13.18) получилось для минимальной скорости! Может быть приведенная задача решатся гораздо проще?

Хорошие задачи для вступительных экзаменов по физике обычно составляются так, чтобы для их решения не возникала необходимости использования высшей математики. Данная задача решается очень просто, если воспользоваться удобной системой отсчета (см. правый рисунок).

В системе отсчета, связанной с бегущим мальчиком, его скорость равна нулю, а кусты, в которых сидит папа девочки вместе с поверхностью земли и самим папой несутся влево со скоростью v. С точки зрения мальчика папе следовало бы двигаться так, чтобы все время находится на прямой S. Это значит, что его вектор скорости должен быть направлен как раз вдоль этой прямой. Существует бесконечное множество векторов, дающих в сумме со скоростью движения v вектор, лежащий на S. Однако, кратчайшим (т.е. соответствующим минимальной скорости) будет вектор, перпендикулярный рассматриваемой прямой. Из подобия прямоугольного треугольника, образованного векторами v и u, треугольнику, образованному прямыми L, S и дорожкой, легко найти величину минимальной скорости (13.19).

	Рис.3.1	"Математический" способ решения задачи.
$X = \sqrt{S^2 - L^2} + L \cdot tg\alpha$	(3.14)	Путь мальчика до точки встречи с папой девочки.
$t = \frac{X}{V} = \frac{\sqrt{S^2 - L^2}}{V} + \frac{L}{V} tg\alpha$	(3.15)	Время движения и папы и мальчика до встречи и начала беседы.
$Y = \frac{L}{\cos\alpha}; u = \frac{Y}{t} = \frac{LV}{\cos\alpha \cdot \left(\sqrt{S^2 - L^2} + Ltg\alpha\right)}$	(3.16)	Путь папы до встречи с мальчиком и скорость движения папы
$\left(\sqrt{S^2 - L^2}\cos\alpha + L\sin\alpha\right)' =$ $= -\sqrt{S^2 - L^2}\sin\alpha + L\cos\alpha = 0 \Rightarrow$ $tg\alpha = \frac{L}{\sqrt{S^2 - L^2}} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{S^2 - L^2}}{S}$	(3.17)	Нахождение угла, соответствующего минимальной скорости. Похоже, что здесь есть над чем очень серьезно задуматься!
$u = \frac{LV}{\frac{S^2 - L^2}{S} + \frac{L^2}{S}} = \frac{L}{S} V$	(3.18)	Минимальная скорость папы девочки.
$\frac{u}{V} = \frac{L}{S}$ 	(3.19)	"Физический" способ решения задачи в одной действие.

Ответ: для оптимального перехвата мальчика нужно бежать под углом $\alpha = \arcsin\frac{L}{S}$ к перпендикуляру к дорожке со скоростью $u = V\frac{L}{S}$.

3.3. Равноускоренное движение в пространстве

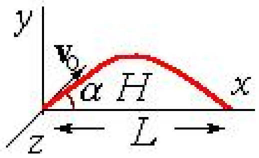
Подобно тому, как это было продемонстрировано в случае движения с постоянной скоростью, формулы одномерного равноускоренного движения обобщаются в векторные соотношения для движения с постоянным ускорением в пространстве (13.20). Приведенные соотношения являются наиболее общими формулами, описывающими все мыслимые случаи равноускоренного движения и его частного случая - движения с постоянной скоростью.

Наиболее часто упоминаемым примером равноускоренного движения в пространстве является движение тела, брошенного под углом к горизонту. Конкретные выражения для зависимостей от времени координат и проекций скорости (13.21) получаются из общих формул равноускоренного движения (13.20).

Время подъема тела определяется из условия обращения в нуль вертикальной составляющей скорости. Подстановка времени подъема в выражение для y-координаты позволяет найти максимальную высоту подъема (13.22).

Время полета тела вычисляется, исходя из условия равенства нулю его y - координаты и оказывается равным удвоенному времени подъема. Т.о. в рассматриваемом случае сохраняется свойство движения тела, брошенного вертикально вверх: время подъема равно времени спуска. Подстановка времени полета в выражение для x - координаты дает значение дальности полета тела (13.23). Максимальная дальность полета достигается при угле бросания в 450.

Уравнение траектории получается исключением времени из двух уравнений для x(t) и y(t). Траекторией тела, брошенного под углом к горизонту, является перевернутая парабола (13.24).

$\mathbf{a} = const \Rightarrow$ $\begin{cases} \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t \\ \mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2 \end{cases}$	(3.20)	Основные формулы равноускоренного движения.
$\begin{cases} x(t) = v_0 t\cos\alpha \\ y(t) = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2} \\ z(t) = 0 \\ v_x(t) = v_0\cos\alpha \\ v_y(t) = v_0\sin\alpha - gt \\ v_z(t) = 0 \end{cases}$ 	(3.21)	Движение тела, брошенного под углом к горизонту
$v_y(\tau) = 0 \Rightarrow \quad \tau = \frac{v_0\sin\alpha}{g} \quad \Rightarrow$ $H = y(\tau) = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$	(3.22)	Вычисление времени подъема и максимальной высоты полета тела, брошенного под углом к горизонту.
$y(T) = 0 \Rightarrow \quad T = 2\frac{v_0\sin\alpha}{g} = 2\tau$ $L = x(T) = \frac{v_0^2\sin(2\alpha)}{g}$	(3.23)	Вычисление времени полета тела и дальности полета.
$t = \frac{x}{v_0\cos\alpha} \Rightarrow \quad y = tg\alpha \cdot x - \frac{g}{v_0^2\cos^2\alpha}x^2$	(3.24)	Уравнение траектории

Пример 3.3. Расстояние между свободно падающими телами

С высокой башни одновременно бросают с одинаковой по величине начальной скоростью два камня. Одни- вертикально, другой - горизонтально. Каково будет расстояние между камнями через время Т после броска.

Решение

Задачу можно решить двумя способами: "математическим" и "физическим". Первый подразумевает формальную запись координат камней в произвольный момент времени с последующим вычислением расстояния между двумя точками с найденными координатами

(13.25 - 13.27). Второй - практически устное решение задачи за счет удачного выбора системы отсчета: с точки зрения свободно падающего наблюдателя оба камня движутся без ускорения.

$\begin{cases} x_1(t) = vt \\ y_1(t) = -\dfrac{gt^2}{2} \end{cases}$	(3.24)	Координаты камня, брошенного горизонтально
$\begin{cases} x_2(t) = 0 \\ y_2(t) = vt - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases}$	(3.25)	Координаты камня, брошенного вертикально.
$L(t) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \ldots = vt\sqrt{2}$	(13.27)	Расстояние между камнями.
$g = 0 \quad \Rightarrow \quad L(t) = \sqrt{(vt)^2 + (vt)^2} = vt\sqrt{2}$	(13.28)	В системе отсчета, связанной со свободно падающим наблюдателем оба камня движутся без ускорения, т.е. равномерно и прямолинейно во взаимно перпендикулярных направлениях. Расстояние между ними вычисляется как диагональ квадрата.

ример 3.4. Упругие отскоки в прямоугольной яме

Небольшой шарик приближается по горизонтальной плоскости к прямоугольной яме размерами L*H. Какой скоростью он должен обладать для того, чтобы "выскочить" на противоположной стороне ямы и продолжить свое движение? Все удары абсолютно упругие. Найти все решения.

Решение:

Задачу легко решить, рассматривая два независимых движения: кусочно - равномерное по горизонтали и кусочно - равноускоренное по вертикали. Описанные формы движения периодически прерываются упругими отскоками, сопровождающимися изменением скорости тела на противоположную.

$t_k = \dfrac{(2k-1)L}{v}$	(3.28)	Моменты времени, соответствующие нахождению тела у правой стенки
$T_n = 2n\sqrt{\dfrac{2H}{g}}$	(3.29)	Моменты времени, соответствующие нахождению тела на уровне края ямы.
$t_k = T_n \quad \Rightarrow$ $v = \dfrac{2k-1}{2n} L\sqrt{\dfrac{g}{2H}}, \quad (k, n = 1, 2, \ldots)$	(3.30)	Условие выхода шарика из ямы: тело должно одновременно оказаться у правой стенки и быть на высоте верхнего края ямы.

4.1. Утверждения в физике: определения, законы природы и их следствия

При формулировке законов Ньютона важно различать два связанных с ним утверждения: определение инерциальной системы отсчета и непосредственно сам закон природы. Определения по своей сути представляют собой утверждения, поясняющие смысл тех или иных терминов и вводятся в результате общепринятых соглашений о их употреблении.

После принятия таких соглашений их дальнейшее обсуждение не представляется конструктивным. В качестве примера можно попытаться дать определение летающей тарелки:

парящее в ночном небе самосветящееся тело, имеющее форму тарелки, вблизи которого перестают работать моторы автомобилей, начинает болеть голова, из которой иногда выходят зеленые человечки. Следует обратить внимание на то, что приведенное определение не содержит никакой информации о существовании или не существовании в реальном мире феномена НЛО. На поставленный вопрос отвечает иное, более содержательное утверждение, относящееся к другому типу высказываний - т.н. законам природы.

Законы природы выражают реальные свойства нашего мира, имеющихся в нем объектов и явлений. В отличии от определений, эти утверждения существенно более содержательны, допускают сомнения в их справедливости и возможность их обсуждения. Новые законы природы не могут быть выведены из уже имеющихся естественно - научных знаний при помощи строгих математических или логических рассуждений. Законы природы угадываются. При этом, очевидно, возможны ошибке и формулировка ложных утверждений. В результате встает важнейший для естествознания вопрос о критерии истинности формулируемых законов. В качестве такого критерия истинности был принят эксперимент, трактуемый в достаточно широком смысле этого понятия (не только действия, производимые в научной или учебной лаборатории, но и повседневный опыт человечества и являющийся отражением этого опыта "здравый смысл").

Имеющийся опыт естествознания показывает, что по мере развития теории формулировки фундаментальных законов природы становятся все более общими и пригодными для корректного описания все большего числа разнообразных явлений окружающего нас мира. В современном естествознании фундаментальные законы природы обычно имеют столь общие и абстрактные формулировки, что их непосредственная экспериментальная проверка оказывается трудновыполнимой или вообще невозможной. В этом случае экспериментальной проверке подлежит набор следствий, получаемых из системы принятых законов природы.

Опыт развития естествознания показывает, что формулируемые законы природы имеют ограниченные области применимости. Попытки абсолютизировать законы природы (т.е. считать их безусловно справедливыми вне той области, где эти законы надежно проверялись на эксперименте) неоднократно приводили с существенным недоразумениям и заблуждениям.

Возвращаясь к примеру с летающей тарелкой, весьма оправданной является формулировка следующего закона природы: "Летающие тарелки в окрестностях планеты Земля не существуют". Это утверждение может обсуждаться и опровергаться в результате представления достоверных свидетельств появления НЛО. В случае достоверной демонстрации научному обществу факта их реального существования приведенная формулировка закона природы может существенно измениться.

4.2. Первый закон Ньютона

Для формулировки первого закона Ньютона необходимо дать определение инерциальной системы отсчета:

Инерциальными системами отсчета называются такие системы, в которых свободные (т.е. не участвующие во взаимодействиях с другими телами) тела движутся без ускорения (т.е. равномерно и прямолинейно) или покоятся (состояние покоя, вообще говоря, следует рассматривать как частный случай равномерного движения с нулевой скоростью).

Для практического использования приведенного определения для выбора инерциальной системы отсчета необходимо описать способ выбора свободного тела: практически все реальные объекты нашего мира участвуют во взаимодействиях. Однако, все известные на сегодняшний день взаимодействия ослабевают по мере увеличения расстояний между взаимодействующими объектами (закон природы). В соответствии с этим свойством в качестве свободного тела следует выбирать тело, удаленное от других на возможно большие расстояния.

Опыт показывает, что покоящийся относительно поверхности Земли наблюдатель не является инерциальной системой отсчета (например, весьма удаленные друг от друга звезды перемещаются по "небесной сфере" по криволинейным траекториям, что, разумеется, связано с вращением нашей планеты. Связанная с центром масс Солнца система отсчета так же не является инерциальной из-за ускоренного движения звезды под действием гравитационного притяжения планет и ее вращения вместе с другими звездами галактики. Т.о. вопрос о существовании инерциальных систем отсчета отнюдь не тривиален. Именно на этот вопрос и отвечает первый закон Ньютона:

Существуют инерциальные системы отсчета.

Очевидно, что существование хотя бы одной инерциальной системы отсчета с необходимостью влечет утверждение о существовании их бесконечно количества: из классического закона сложения ускорений следует, что любое тело, равномерно движущееся в какой-либо системе отсчета, будет двигаться так же без ускорения в любой системе отсчета, равномерно движущейся относительно исходной. Т.о. любая система отсчета, равномерно движущаяся относительно инерциальной системы отсчета, так же является инерциальной.

Опыт показывает, что в инерциальных системах отсчета тела могут находится в состоянии покоя или равномерного движения и в тех случаях, когда эти тела заведомо участвуют в взаимодействиях (например, тело, покоящееся на поверхности слегка наклоненного стола, участвует во взаимодействиях с Землей, атмосферой, наклонной поверхностью). В указанном случае говорят о компенсации взаимодействий.

4.3. Второй закон Ньютона

Корректная формулировка второго закона Ньютона вызывает определенные трудности не только у учащихся. Основная проблема состоит в том, что в общеизвестном равенстве (4.1), связывающем три величины (суммарную силу, массу и ускорение тела) только одна (ускорение) ранее определялась в кинематике. Существует два альтернативных подхода к определению двух оставшихся, каждый из них имеет свои достоинства и недостатки.

В большинстве элементарных курсов первоначально дается определение массы, как меры инертности тела. В такой формулировке определение малопригодно для физики, поскольку не содержит в себе описания способа сопоставления массе какого-либо количественного значения. Очевидно, этот недостаток в принципе может быть устранен добавлением к определению описания процедуры измерения массы. Однако, на следующем этапе становится неизбежным шаг введения понятия силы. В рамках рассматриваемого подхода сила традиционно вводится как произведение массы на ускорение. При этом физический смысл одного из важнейших законов природы (закона Ньютона) в большой мере маскируется формулировкой, форма которой в большей степени соответствует определениям.

Альтернативный путь состоит в первоначальном определении векторы силы, вводимого в качестве количественной характеристики взаимодействия тел, путем описания процедуры ее зрения в результате использования прибора - динамометра. Эта процедура состоит в следующем:

- Необходимо выбрать инерциальную систему отсчета (существование такой системы гарантируется первым законом Ньютона).
- Если в такой системе отсчета тело движется с ускорением, оно участвует во взаимодействиях.
- Опыт показывает, что независимо от природы взаимодействий их результат (ускоренное движения тела) может быть скомпенсирован (тело может быть приведено в состояние покоя) при помощи воздействия определенным образом деформированного тела (пружины).
- Опыт показывает, что существует единственный способ деформации тела (величина и направление), необходимый для компенсации взаимодействий.
- В качестве величины вектора силы, по определению, может быть принята величина деформации эталонной пружины, а в качестве ее направления - направление деформации, необходимой для компенсации взаимодействия.

После введения понятия силы становится возможной следующая формулировка второго закона Ньютона:

Опыт показывает, что ускорение тела, участвующего во взаимодействиях, пропорционально приложенной к нему результирующей силы.

Математическая запись второго закона Ньютона имеет вид (4.2), причем, в отличие от математики, для физики важен порядок записи входящих в формулировку закона величин: выбранный в (4.2) порядок записи подчеркивает тот факт, что тела ускоряются в результате воздействия на них сил, а не наоборот.

В соответствии со вторым законом Ньютона отношение модулей силы и ускорения для каждого тела оказывается вели чиной постоянной. Это отношение называют инертной массой тела (4.3). Второй закон Ньютона совместно с определением инертной массы приводят к хорошо известному соотношению (4.4), согласно которому ускорение тела пропорционально приложенной к нему результирующей силе и обратно пропорционально инертной массе тела.

Основными свойствами инертной массы являются: ее скалярный характер, ее неотрицательность и аддитивность (последнее означает, что масса тела равна сумме масс составляющих его частей).

В заключении представляется полезным указать на некоторые недостатки рассмотренного подхода к формулировке второго закона Ньютона. Указанный подход трудно реализуем с точки зрения создания эталона силы: техническая задача создания эталонной пружины с неизменными свойствами оказывается достаточно сложной. В связи с этим в настоящее время в физике используются эталоны длины, времени (их совокупности достаточно для определения ускорения) и массы. В результате единица силы вводится как комбинация перечисленных эталонных единиц, что соответствует первому варианту изложения второго закона Ньютона.

$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$	(4.1)	"Стандартная" формулировка второго закона Ньютона.
$\mathbf{a} \propto \mathbf{F}$	(4.2)	Второй закон Ньютона: ускорение тела пропорционально действующей на него силе.
$m \equiv \dfrac{\lvert\mathbf{F}\rvert}{\lvert\mathbf{a}\rvert}$	(4.3)	Определение инертной массы.
$\mathbf{a} = \dfrac{\mathbf{F}}{m}$	(4.4)	Соответствующая логике изложения формулировка второго закона.

4.4. Третий закон Ньютона

Как уже отмечалось, силы возникают в результате взаимодействий между материальными телами. При этом оказывается, что во всех случаях взаимодействия двух тел возникают силы, приложенные к каждому из участников взаимодействия. При этом не зависимо от природы взаимодействий между телами выполняется простая связь между действующими на них силами, которая и описывается третьим законом Ньютона:

При взаимодействии двух тел всегда возникают силы, приложенные к каждому из тел, при этом силы равны друг другу по величине и противоположны по направлению (4.5).

Необходимо отметить, что третий закон Ньютона не содержит утверждения о том, что возникающие при взаимодействиях между двумя телами силы обязательно направлены вдоль прямой, соединяющей эти тела. Желающие более подробно познакомиться с этим нетривиальным вопросом рекомендуем познакомиться с электронной публикацией профессора физического факультета СПбГУ С.Н.Маниды.

$\mathbf{f}_{12} = -\mathbf{f}_{21}$	(4.5)	Третий закон Ньютона

4.5. Область применимости законов классической механики

При формулировке фундаментальных законов физики (в том числе и законов Ньютона) важно понимать, что эти законы (как и любые законы естествознания) имеют ограниченную область применимости. Так, законы классической механики применимы только для описания движения достаточно массивных макроскопических тел, при условии их движения с малыми (по сравнению со скоростью света) скоростями.

Для описания движения микроскопических тел с нерелятивистским и (т.е. малыми по сравнению со скоростью света скоростями) необходимо пользоваться законами квантовой механик и, изучение которых выходит далеко за пределы программы школьного курса по физике и математике. При описании движения макроскопических тел со сравнимыми с большими скоростями необходимо использовать идеи теории относительности. Так, например, третий закон Ньютона носит весьма приближенный характер и выполняется точно, строго говоря, только для покоящихся тел. Это связано с тем, что взаимодействия между телами распространяются с конечной скоростью (равной скорости света в пустоте). В результате в случае быстрого смещения одного из удаленных друг от друга тел, взаимодействующих друг с другом, приложенные к телам силы могут отличаться на протяжении интервала времени, равного отношению расстояния между телами к скорости света. При около световых скоростях движения тел второй закон Ньютона в форме (4.4) так же перестает выполняться. В этом случае оказывается применимой импульсная формулировка второго закона Ньютона.

5.1. Сила тяжести, вес тела

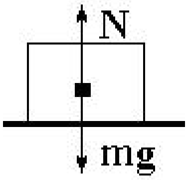
Опыт показывает, что вблизи поверхности Земли все лишенные опоры тела, приобретают одинаковые, направленные вниз ускорения g=9.8 м/с2. В соответствии со вторым законом Ньютона, это означает, что *вблизи поверхности Земли каждое тело испытывает действие силы тяжести, пропорциональной инертной массе этого тела* (5.1).

В случае тела, покоящегося на опоре или подвесе, сумма приложенных к этому телу сил обязана равняться нулю. Это означает, что помимо силы тяжести на тело со стороны опоры должна действовать еще одна сила, компенсирующая притяжение к Земле. Указанная сила носит название реакции опоры. По своему происхождению сила реакции опоры обусловлена электромагнитными взаимодействиями: воздействие притягиваемого Землей тела приводит к деформации опоры, в результате которой изменяются расстояния между составляющими ее атомами и молекулами, что в свою очередь приводит к возникновению электрических сил. Согласно третьему закону Ньютона, тело действует на опору с такой же по величине силой, как и сила воздействия опоры на тело (сила реакции опоры). *Сила, с которой тело давит на опору или растягивает подвес, называется весом тела*. Т.о. в простейшем случае тела, покоящегося на неподвижной опоре и не испытывающего действия никаких других сил, кроме силы тяжести и реакции опоры, вес тела оказывается равным произведению его массы на ускорение свободного падения (5.2).

В реальной ситуации вес тела может отличаться от mg из-за действия других сил (например, силы Архимеда) или ускоренного движения опоры вместе с расположенным на ней телом (например, из-за вращения Земли).

Иногда в понятие силы тяжести авторами учебников включается не только сила, возникающая в результате гравитационных взаимодействий между телом и планетой, но и дополнительные эффекты, связанные, например, с вращением Земли. В этом случае оказывается, что сила тяжести на экватора меньше, чем на полюсе. Как уже отмечалось, определения в физики не должны служить оводом для серьезных дискуссий, поскольку представляют собой не более, чем предмет общепринятого соглашения. Тем ни менее, включение в определение силы тяжести эффектов, обусловленных неинерциальностью вращающейся системы отсчета, связанной с планетой, не кажется целесообразным, поскольку противоречит ранее принятому определению силы, как меры взаимодействия тел.

$\mathbf{a} = \mathbf{g} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F} = m\mathbf{g}$	(5.1)	Сила тяжести вблизи поверхности Земли

 $\mathbf{a} = \mathbf{g} \;\Rightarrow\; \mathbf{F} = m\mathbf{g}$ $\mathbf{P} = -\mathbf{N} = m\mathbf{g}$	(5.2)	Вес тела в простейшем случае.

5.2. Сила Архимеда

В неподвижной жидкости (или газе) неподвижное тело испытывает действие выталкивающей силы, величина которой равна весу вытесненной (т.е. занимающей объем тела) жидкости (или газа).

Сформулированное свойство неподвижных жидкостей (или газов) можно обосновать, мысленно заменив погруженное в нее тело точно такой же по объему порцией жидкости (или газа). Поскольку рассматриваемая порция находится в состоянии покоя, действующая на нее сила тяжести полностью компенсируется выталкивающей силой Архимеда, величина которой оказывается в точности равной произведению массы вытесненной жидкости (или газа) на ускорение свободного падения.

Пример 5.1. Вес килограмма пуха и свинца.

Имеется два тела одинаковой массы, но различных плотностей ("килограмм пуха и килограмм свинца"). Вес какого из двух тел будет больше, если взвешивание производится вблизи поверхности Земли, где, как известно, имеется атмосфера.

Решение

$0 = m\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{F}$	(5.3)	Условие равновесия тела при наличии выталкивающей силы Архимеда F.
$N_i = mg - F = mg - \rho_0 gV = $ $= mg - \rho_0 g\dfrac{m}{\rho_i} = mg\left(1 - \dfrac{\rho_0}{\rho_i}\right)$	(5.4)	Вес тела с плотностью p_i в газе с плотностью p_0.
$\rho_2 > \rho_1 \;\Rightarrow\; N_2 > N_1$	(5.5)	Тело с большей плотностью в воздухе весит больше, поскольку вытесняет меньший объем газа.

Ответ: килограмм свинца в воздухе весит больше, чем килограмм пуха.

5.3. Сила Архимеда в общем случае

Закон Архимеда в классической формулировке применим только в случае покоящихся жидкостей или газов. В более сложных случаях рекомендуется выводить необходимые для решения задачи формулы, используя рассуждения, аналогичные приведенным в пункте 5.2 при выводе "классического" закона Архимеда. В качестве примера рассмотрите задачу, предлагавшуюся на районном туре олимпиады г. С.-Петербурга.

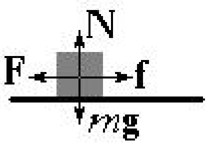
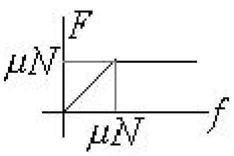
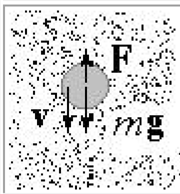
5.4. Диссипативные силы. Силы сухого и вязкого трения.

В природе существует достаточно много сил, действие которых приводит к потере (диссипации) механической энергии и превращению ее в другие формы (тепловую, электромагнитную и т.д.). В подавляющем большинстве случаев эти силы препятствуют движению тел. К диссипативным силам относятся: сила сухого трения (возникает при относительном движении соприкасающихся поверхностей твердых тел), сила вязкого трения (возникает при движении тела в жидкой или газообразной среде), сила радиационного трения (возникает при ускоренном движении электрически заряженных тел вследствие излучения ими электромагнитных волн).

При ответах на экзаменах учащиеся часто делают ошибочные утверждения о том, что действующая на тело сила сухого трения равна произведению коэффициента трения на величину силы реакции опоры или (что еще хуже) произведению коэффициента трения на величину силы тяжести. Для того, чтобы убедиться в ошибочности подобных утверждений достаточно представить себе тела, покоящееся на шероховатой горизонтальной поверхности. В рассматриваемом случае сила тяжести полностью компенсируется силой реакции опоры, в результате чего тело не приобретает никакого ускорения. Никакой горизонтально направленной силы трения при этом не существует (иначе компенсация сил нарушилась бы и тело начало бы двигаться с ускорением). Если к рассматриваемому телу приложить горизонтальную сдвигающую силу, то до тех пор, пока тело остается неподвижным, сила трения оказывается равной по величине и направленной противоположно этой силе (5.6). Компенсация сдвигающей силы силой сухого трения оказывается возможной вплоть до момента достижения обеими силами значения, равного произведению коэффициента трения на величину силы реакции опоры. При дальнейшем увеличении сдвигающей силы сила сухого трения перестает возрастать и остается практически постоянной. Компенсация сил нарушается, тело начинает двигаться с ускорением. Иногда действующую на неподвижное тело силу сухого трения называют трением покоя, а действующую на скользящее тело силу трения - трением скольжения. Т.о. *до начала проскальзывания соприкасающихся поверхностей сила сухого трения принимает такое значение, что обеспечивает их относительную неподвижность. При наличии проскальзывания сила сухого трения остается равной произведению коэффициента сухого трения на величину силы реакции опоры* (5.7).

Направление силы сухого трения всегда оказывается таким, что эта сила препятствует взаимному проскальзыванию соприкасающихся поверхностей. При этом утверждение о том, что силы сухого трения всегда препятствует движению тел является ошибочным: например, разгоняющийся автомобиль ускоряется из-за того, что на его колеса со стороны Земли действует сила, направленная вперед по направлению движения.

Сила вязкого трения направлена против скорости движения тела относительно жидкости или газа и зависит от скорости относительного движения по достаточно сложному закону. При малых скоростях движения эта сила с хорошей точностью является линейной функцией скорости (5.8). Именно наличие силы вязкого трения приводит к тому, что ускорение тел, падающих в вязкой среде, по мере увеличения их скорости постепенно уменьшается от величины g до нулевого значения.

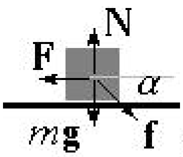
 $\begin{cases} F = f, & f \le \mu N \\ F = \mu N, & f \ge \mu N \end{cases}$	(5.6)	Величина силы сухого трения **F** в зависимости от величины силы тяги **f**.
 $F \le \mu N$	(5.7)	Сила сухого трения.
 $\mathbf{F} = -\eta\,\mathbf{v}$	(5.8)	Сила вязкого трения в случае падения тела в вязкой среде.

Пример 5.2. Заклинивание

Ящик массой *M*, покоящийся на шероховатой поверхности (коэффициент трения m)т пытаются сдвинуть с места, воздействуя на него силой, направленной под углом *a* к горизонту и прижимающей ящик к поверхности. При каком минимальном значении силы ящик сдвинется с места?

Решение:

В данной задаче рассматривается несколько неожиданная ситуация: при некоторых соотношениях между коэффициентом трения и углом действия сдвигающей силы оказывается, что ящик не может быть сдвинут с места ни при каком значении силы **f**. Объяснение этого состоит в том, что внешняя сила не только стремится сместить ящик, но и прижимает его к поверхности, увеличивая силу реакции опоры и, следовательно, предельную величину силы трения покоя. Начиная с некоторого значения угла, предельное значение трения покоя начинает возрастать быстрее, чем горизонтальная составляющая сдвигающей силы.

 $m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{F} + \mathbf{f}$	(5.9)	Силы, действующие на ящик (**F** - сила трения, **f** - сдвигающая сила).
$\begin{cases} x: \quad ma_x = f\cos\alpha - F \\ y: \quad 0 = N - mg - f\sin\alpha \end{cases}$	(5.10)	Проекция векторного равенства (5.9) на координатные оси.
$\begin{cases} N = mg + f\sin\alpha \\ f\cos\alpha - \mu N = \\ = f\cos\alpha - \mu mg - \mu f\sin\alpha = ma_x \geq 0 \end{cases}$	(5.11)	Условие проскальзывания ящика.
$f \geq \dfrac{\mu mg}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}$	(5.12)	Величина сдвигающей силы.
$\mu < ctg\alpha$	(5.13)	Условие возможности сдвинуть ящик с места (отсутствие заклинивания)

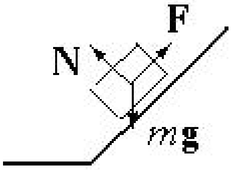
Ответ: при $\mu < ctg\alpha$ сдвигающая сила должна удовлетворять неравенству $f \geq \dfrac{\mu mg}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}$. В противном случае ящик сдвинуть невозможно.

Пример 5.3 Скользкий подъем

Автомобиль с очень мощным двигателем приближается со скоростью *v* к началу подъема, составляющего угол *a* с горизонтом, и пытается въехать на него, не выключая мотор. На какую максимальную высоту поднимется автомобиль, если коэффициент трения его колес о покрытие дороги известен?

Решение:

Маленькая неожиданность, "спрятанная" в этой задаче состоит в том, что в рассматриваемой ситуации сила трения помогает автомобилю взбираться на подъем, а не мешает движению (если бы это было не так, то зимой дороги не посыпали бы песком).

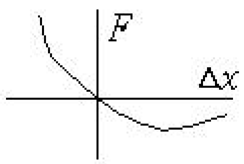
 $m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{F}$	(5.14)	Силы, действующие на автомобиль на подъеме.

$\begin{cases} x: & ma_x = F - mg \cdot \sin\alpha \\ y: & 0 = N - mg \cdot \cos\alpha \end{cases}$	(5.15)	Проекция векторного уравнения (5.14) на координатные оси (ось X направлена параллельно шоссе).
$a_{\max} = g(\mu \cdot \cos\alpha - \sin\alpha)$	(5.16)	Максимальное ускорение, которое способна сообщить автомобилю сила трения.
$\mu \geq tg\alpha \quad \Rightarrow \quad a \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \forall H$	(5.17)	При достаточно большом коэффициенте трения автомобиль может въехать на любую высоту.
$\mu < tg\alpha \quad \Rightarrow \quad a = -g(\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha) < 0$	(5.18)	Условие торможения автомобиля на склоне.
$S = \dfrac{0 - v^2}{2a} = \dfrac{v^2}{2g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}$	(5.19)	Путь по склону до полной остановки.
$H = S \cdot \sin\alpha = \dfrac{v^2}{2g(1 - \mu ctg\alpha)}$	(5.20)	Максимальная высота подъема автомобиля.

Ответ: если $\mu \geq tg\alpha$, автомобиль поднимется на любую высоту, в противном случае - высота подъема составит $H = \dfrac{v^2}{2g(1 - \mu ctg\alpha)}$.

5.5. Сила упругости

Возникновение сил упругости обусловлено электромагнитными взаимодействиями. При деформации тел расстояния между слагающими их атомами и молекулами изменяются, что приводит к возникновению сил притяжения между частицами. В общем случае связь между величиной действующей на тело силы и его деформацией оказывается весьма сложной (5.21). При малых деформациях сила упругости оказывается примерно пропорциональной величине деформации (удлинения или сжатия)тела. При наличии пропорциональности между действующей на тело силой и величиной деформации говорят о выполнении закона Гука. Коэффициент пропорциональности между силой и деформацией называют коэффициентом упругости. В подавляющем большинстве задач школьного курса подразумевается выполнение закона Гука для сколь угодно больших деформаций тел (пружин).

 $\mathbf{F} \approx -k \cdot \Delta\mathbf{r}$	(5.21)	Реальная зависимость силы упругости от величины деформации и приближенный закон Гука.

6.1. Основная задача механики и законы Ньютона

Основная задача механики состоит в определении положений и скоростей тел в произвольный момент времени по известным положениям и скоростям в начальный момент (начальным условиям).

В рамках классической механики решение сформулированной задачи обеспечивается установленными И.Ньтоном законами движения. Действительно, положение (т.е. радиус-вектор) материальной точки **r***(t)* в произвольный момент времени может быть найдено, если известно ее начальное положение **r***(0)* и скорость **v***(t)* в произвольный момент времени. Для нахождения скорости необходимо знание ее начального значения **v***(0)* и ускорения ("скорости изменения скорости") в произвольный момент времени **a***(t)*. На первый взгляд может показаться, что возникшая задача приводит к бесконечной цепочке: для нахождения ускорения нужна информация о скорости его изменения и т.д. Однако, установленные И.Ньютоном законы движения позволяют оборвать эту цепочку на конечном шаге: ускорение может быть найдено как отношение действующей на тело силы к его инертной массе (6.1).

В реальности описанный алгоритм решения задач механики оказывается труднореализуемым из-за того, что действующие на тела силы могут зависеть не только от времени, но и от скорости и положения тела в пространстве. В результате возникает "самозацепленная" задача, которую в математике принято называть обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка (6.2). Решение такого уравнения в общем случае представляет определенные сложности. В курсе высшей математики доказывается теорема о том, что классическое уравнение движения (6.2) совместно с начальными условиями (при некоторых ограничениях, которые всегда выполняются для реальных физических систем) всегда имеет решение и при том - единственное.

В случае движения нескольких точечных тел для каждого из них может быть записано уравнение вида (6.2). Для получившейся конечной системы так же может быть доказана теорема существования и единственности решения.

Т.о. в рамках классической физики существует строгая детерминированность механических систем: исходное состояние системы (начальные положения и скорости всех составляющих ее материальных точек) однозначно определяют ее будущее состояние в любой последующий момент времени. Сформулированное свойство макроскопических систем кажется несколько неожиданным и противоречащим нашему жизненному опыту (в реальном мире присутствует случайность). Реальный мир действительно не является строго детерминированным из-за того, что классические законы движения неприменимы для описания микрочастиц (атомов и молекул), поведение которых подчиняется законам квантовой механики и носит принципиально вероятностный характер.

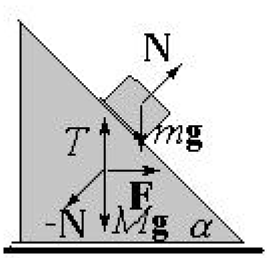
$\mathbf{r}(t) \Leftarrow \begin{cases}\mathbf{v}(t)\\ \mathbf{r}(0)\end{cases} \Leftarrow \begin{cases}\mathbf{a}(t)\\ \mathbf{v}(0)\end{cases} \Leftarrow \mathbf{a}(t) = \dfrac{\mathbf{F}(\mathbf{r},\mathbf{v},t)}{m}$	(6.1)	Алгоритм решения основной задачи механики
$\begin{cases} m\dfrac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} = \mathbf{F}(\mathbf{r},\dfrac{d\mathbf{r}}{dt},t) \\ \mathbf{r}(t=0) = \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{v}(t=0) = \mathbf{v}_0 \end{cases}$	(6.2)	Второй закон Ньютона как обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка.

5.2. Простейшие задачи на системы тел

Основная идея решения задач механики, посвященных расчетам движения системы тел состоит в применении второго закона Ньютона к каждому из тел системы, что приводит к системе уравнений для нахождения неизвестных величин.

Пример 6.1 Тело на гладком клине

Клин массы *M*, наклонная поверхность которого составляет угол a с горизонтом, находится на гладкой горизонтальной опоре. С какой постоянной силой тянут клин в горизонтальном направлении, если известно, что расположенное на его наклонной поверхности тело массой *m* остается неподвижным относительно клина. Трение между всеми соприкасающимися поверхностями отсутствует.

$m\mathbf{a} = \mathbf{N} + m\mathbf{g}$ $M\mathbf{a} = M\mathbf{g} + \mathbf{F} + \mathbf{T} - \mathbf{N}$ 	(6.3)	Условия неподвижного нахождения груза на наклонной поверхности клина.

$\begin{cases} ma = N\sin\alpha \\ 0 = N\cos\alpha - mg \end{cases} \Rightarrow a = g \cdot tg\alpha$	(6.4)	Условие движения груза с ускорением клина.
$Ma = F - N\sin\alpha = F - ma$	(6.5)	Проекция на горизонтальную ось уравнения движения клина.
$F = (M + m)a = (M + m)g \cdot tg\alpha$	(6.6)	Искомая сила (следствие уравнений (6.4) и (6.5)

Ответ: на клин нужно действовать с силой $F = (M + m)g \cdot tg\alpha$.

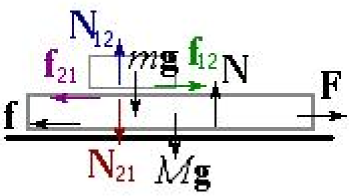
6.3. Система тел при наличии трения

При наличии сил трения между телами рассматриваемой системы важно помнить о том, что при взаимодействиях силы всегда появляются парами. При этом для них выполняется третий закон Ньютона.

Пример 6.2. Как выдернуть доску из-под груза

С какой горизонтально приложенной силой нужно тянуть доску массой M для того, чтобы первоначально покоившийся на ней груз массы m начал проскальзывать? Доска лежит на горизонтальной поверхности. Коэффициенты трения для всех пар соприкасающихся поверхностей равны друг другу и считаются заданными.

Решение:

 $\begin{cases} m\mathbf{a}_1 = m\mathbf{g} + \mathbf{N}_{12} + \mathbf{f}_{12} \\ M\mathbf{a}_2 = M\mathbf{g} + \mathbf{N}_{21} + \mathbf{f}_{21} + \mathbf{N} + \mathbf{f} + \mathbf{F} \end{cases}$	(6.7)	Силы, действующие на доску и груз: $\mathbf{N}_{12}$ и $\mathbf{N}_{21}$ - силы реакции опоры между доской и грузом $\mathbf{f}_{12}$ и $\mathbf{f}_{21}$ - силы трения меду поверхностями доски и груза, **N** и **f** - сила реакции опоры и сила трения, действую
$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 \equiv \mathbf{a} \Rightarrow (m + M)\mathbf{a} = (m + M)\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{f} + \mathbf{F}$	(6.8)	Условие совместного движения доски и груза
$\begin{cases} (m + M)a = F - f = F - \mu N \\ 0 = -(m + M)g + N \end{cases}$	(6.9)	Проекция (6.8) на горизонтальную и вертикальную оси.
$a = \dfrac{F - \mu N}{m + M} = \dfrac{F - \mu(m + M)g}{m + M} = \dfrac{F}{m + M} - \mu g$	(6.10)	Ускорение системы при условии отсутствия проскальзывания между грузом и доской.
$ma_{MAX} = f_{12} = \mu N_{12} = \mu mg \Rightarrow$ $a_{MAX} = \mu g$	(6.11)	Максимальное ускорение, которое может приобрести верхний груз за счет действия силы трения.
$a \le a_{MAX} \Rightarrow \dfrac{F}{m + M} - \mu g \le \mu g \Rightarrow$ $F \le 2\mu g(m + M)$	(6.12)	Условие отсутствия проскальзывания груза относительно доски.
$F > 2\mu g(m + M)$	(6.13)	Условие соскальзывания груза с доски.

Ответ: груз соскользнет с доски, если ее тянуть с силой, удовлетворяющей неравенству: $F \le 2\mu g(m + M)$.

6.4. Невесомые блоки и идеальные нити

Стандартными для школьного курса являются задачи про грузы, подвешенные на невесомых нерастяжимых нитях, перекинутых через способные вращаться без трения невесомые блоки. При решении таких задач важно понимать, где именно используются указанные в условии приближения (равенство нулю масс нитей и блоков и не растяжимость нитей). Если масса нити равна нулю, то сумма сил, приложенных к любому ее отрезку со стороны других тел обязана равняться нулю (иначе участок нити приобретет бесконечное ускорение). Т.о. груз, висящий на невесомой, перекинутой через блок нити, воздействует на блок с той же по величине силой, с которой нить действует на груз. Условие невесомости блока приводит к тому, что силы натяжения нити по разные стороны блока обязаны равняться друг другу (иначе блок закрутится с бесконечным ускорением). Т.о. силы натяжения нити, действующие на грузы, подвешенные по разные стороны блока, оказываются одинаковыми.

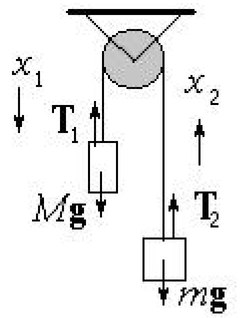
Условие не растяжимости нити приводит к тому, что сумма длин всех ее отрезков обязана оставаться постоянной. Дифференцирование по времени соответствующего равенства дает соотношение между скоростями грузов, а еще одно дифференцирование - связь ускорений грузов.

Пример 6.3. Неподвижный блок

Невесомая нерастяжимая нить перекинута через неподвижный невесомый блок, способный вращаться без трения. К концам нити прикреплены два груза, массами M и m, начальное расстояние между которыми равно H. В начальный момент грузы покоились. Через какое время после того, как грузы отпустили, они окажутся на одной высоте?

Решение:

При решении этой задачи следует учесть, что до момента встречи каждый из грузов проходит расстояние, равное половине начального. Кроме того, встреча грузов может состояться лишь в том случае, если более тяжелый окажется подвешенным выше, чем более легкий.

 $\begin{cases} M\mathbf{a}_1 = M\mathbf{g} + \mathbf{T}_1 \\ m\mathbf{a}_2 = m\mathbf{g} + \mathbf{T}_2 \end{cases}$	(6.14)	Уравнения движения для каждого их грузов. Записанные векторные равенства удобнее проектировать на различные оси x_1 и x_2. В этом случае положительному ускорению первого груза будет соответствовать положительное ускорение второго.
$\begin{cases} a_1 = a_2 \equiv a \\ T_1 = T_2 \equiv T \end{cases} \Rightarrow$ $\begin{cases} Ma = Mg - T \\ ma = -mg + T \end{cases} \Rightarrow \quad a = \frac{M-m}{M+m} g$	(6.15)	Ускорения грузов.
$\frac{H}{2} = \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{H}{a}} = \sqrt{\frac{H}{g} \frac{M+m}{M-m}}$	(6.16)	Время до встречи грузов.
$M > m$	(6.17)	Необходимое условия встречи грузов.

Ответ: если $M > m$, грузы окажутся на одной высоте через время $t = \sqrt{\frac{H}{a}} = \sqrt{\frac{H}{g} \frac{M+m}{M-m}}$ в противном случае грузы вообще не встретятся.

6.5. Комбинированные задачи

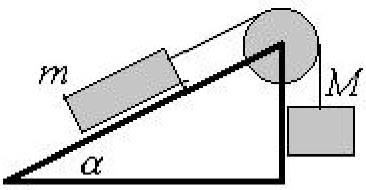
Опыт проведения вступительных экзаменов показывает, что наибольшие трудности у абитуриентов вызывают "комбинированные" задачи, решение которых требует знаний из различных разделов физики. На данном этапе на примере механики полезно познакомиться с задачами такого типа, требующих использования различных идей, уже обсуждавшихся в нашем курсе.

Пример 6.4. "Комбинированная задача"

На неподвижном клине, наклонная плоскость которого составляет угол а с горизонтом, установлен невесомый блок, способный вращаться без трения. К перекинутой через него нити привязаны два груза массами m и M, один из которых находится на наклонной плоскости, а другой висит, касаясь вертикальной стенки клина. При этом удерживающая его нить расположена строго вертикально. С каким ускорением начнут двигаться грузы, если их отпустить? Коэффициент трения грузов о поверхность клина одинаков и считается заданным.

Решение:

При решении этой задачи весьма часто встречается ошибка, связанная с вычислением силы трения, действующей на груз M. На самом деле величина этой силы равна нулю из-за того, что сила реакции опоры, действующая на груз со стороны стенки клина отсутствует (иначе нить не была бы расположена вертикально). Вторая проблема состоит в выборе правильного направления действия на груз m силы трения. Очевидно, что эта сила действует в направлении, противоположном тому, куда система "стремится" сдвинуться. Для выбора этого направления целесообразно решить вспомогательную задачу о движении грузов в отсутствии сил трения

		Условие задачи
$\begin{cases} ma = T - mg\sin\alpha \\ Ma = Mg - T \end{cases}$	(6.18)	Уравнения движения грузов в отсутствии сил трения. За положительное выбрано направление движения, при котором груз M опускается.
$a = g\dfrac{M - m\cdot\sin\alpha}{M + m}$	(6.19)	Ускорение системы в случае отсутствия трения.
$a > 0 \Rightarrow \quad M > m\sin\alpha$	(6.20)	Условие, при котором сила трения, действующая на груз m, направлена влево и вниз.

После решения вспомогательной задачи выбор направления действия силы трения не должен представлять какой-либо проблемы. При дальнейшем решении задачи с учетом силы трения следует учесть, что в зависимости от величины коэффициента трения возможными являются две ситуации: грузы движутся с постоянными ускорениями, либо - покоятся. Наконец, в случае система будет покоиться при любом коэффициенте трения.

7.1. Определения

Импульсом материальной точки называется произведение ее массы на скорость (7.1).

Импульсом системы материальных точек называется сумма (разумеется, векторная) ***импульсов всех материальных точек, входящих в систему*** (7.2).

$\mathbf{p} \equiv m\mathbf{v}$	(7.1)	Определение импульса материальной точки.
$\mathbf{P} \equiv \sum_{i=1}^{N}\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \ldots + \mathbf{p}_N$	(7.2)	Определение импульса системы материальных точек.

6.2. Импульсная формулировка второго закона Ньютона

Скорость изменения импульса материальной точки равна равнодействующей сил, действующих на эту материальную точку. Приведенное утверждение иногда называют импульсной формулировкой второго закона Ньютона.

Импульсная формулировка второго закона Ньютона может быть легко доказана, сходя из второго закона Ньютона, в предположении постоянства массы материальной точки (7.3).

Если масса материальной точки изменяется во времени, приведенная в (7.3) цепочка равенств не может выполняться. Это означает, что в случае движения тела с переменной массой как минимум одна из формулировок второго закона должна быть неверной (ошибочными могут оказаться обе формулировки). Опыт показывает, что ***в случае переменной массы тела импульсная формулировка второго закона Ньютона остается применимой***, в то время как "классическая школьная формулировка" перестает выполняться.

Из импульсной формулировки непосредственно следует закон сохранения импульса материальной точки:

Если сумма действующих на материальную точку сил равна нулю, то импульс материальной точки сохраняется во времени.

$\left.\frac{\Delta\mathbf{p}}{\Delta t}\right\|_{\Delta t\to 0} = \left.\frac{\mathbf{p}(t+\Delta t)-\mathbf{p}(t)}{\Delta t}\right\|_{\Delta t\to 0} = \left.\frac{m\mathbf{v}(t+\Delta t)-m\mathbf{v}(t)}{\Delta t}\right\|_{\Delta t\to 0} = m\left.\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}\right\|_{\Delta t\to 0} = m\mathbf{a} = \mathbf{F}_{\Sigma}$	(7.3)	Доказательство импульсной формулировки второго закона Ньютона.

Пример 7.1. Вес кобры

Лежавшая на пружинных весах кобра длиной L, масса которой M равномерно распределена по всей длине тела, встает на хвост за время T. Считая подъем кобра на хвост равномерным, определить вес кобры на указанном промежутке времени.

Решение:

Во время подъема кобры на хвост силы тяжести и реакции опоры не уравновешивают друг друга. Именно возникающая при этом разность сил обеспечивает подъем кобры, который, очевидно, сопровождается постепенным возрастанием ее импульса, направленного вертикально вверх. Т.о. для решения задачи целесообразно использовать импульсную формулировку второго закона Ньютона.

$\frac{\Delta\mathbf{p}}{\Delta t} = M\mathbf{g} + \mathbf{N}$	(7.4)	Импульсная формулировка второго закона ньютона для встающей на хвост кобры.
$\frac{m(t+\Delta t)v - m(t)v}{\Delta t} = N - Mg$	(7.5)	Проекция (6.4) на ось, направленную вертикально вверх.
$m(t) = M\frac{vt}{L} \Rightarrow \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{Mv^2}{L} \Rightarrow N = Mg + \frac{Mv^2}{L} = Mg + \frac{ML^2}{T}$	(7.6)	Зависимость от времени массы вертикально расположенной части тела кобры и окончательное выражение для веса встающей на хвост змеи.

Ответ: вес встающей на хвост кобры равен $N = M\left(g + \frac{L^2}{T}\right)$

7.3. Скорость изменения импульса системы материальных точек

Скорость изменения импульса системы материальных точек равна сумме скоростей изменения импульса каждой точки системы (7.7). В свою очередь, скорость изменения импульса каждой из материальных точек равна сумме приложенных к ней сил. Эти силы можно разить на две группы: внешние силы (действуют на объекты системы со стороны тел, не принадлежащих рассматриваемой системе) и внутренние (действуют между телами, составляющими рассматриваемую систему). Сумма внутренних сил в системе оказывается равной нулю, поскольку в соответствии с третьим законом Ньютона оказываются равными нулю суммы сил, возникающих при взаимодействиях в каждой паре материальных точек системы.

В результате оказывается, что ***скорость изменения полного импульса системы равна сумме внешних сил, действующих на все элементы системы.***

Системы, в которых не действуют внешние силы, называются замкнутыми.

В замкнутых системах выполняется закон сохранения импульса:

В замкнутых системах полный импульс сохраняется во времени.

$\frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{P}(t+\Delta t) - \mathbf{P}(t)}{\Delta t} = \frac{\sum \mathbf{p}_i(t+\Delta t) - \sum \mathbf{p}_i(t)}{\Delta t} = \sum \frac{\Delta \mathbf{p}_i(t)}{\Delta t}$	(7.7)	Выражение для скорости изменения импульса системы через скорости изменения импульсов составляющих систему частиц.
$\frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta t} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{F}_N = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \ldots + \mathbf{f}_N \equiv \mathbf{f}_\Sigma^{внеш}$	(7.8)	Скорость изменения им пульса системы равна сумме сил, действующих на все объекты системы.

Пример 7.2. Удачный выстрел

Ядро выпущено из пушки под углом *a* к горизонту с начальной скоростью v_0. В верхней точке своей траектории ядро взрывается, раскалываясь на две одинаковые половинки. Одна из них, двигаясь по ядра, возвращается обратно в пушку. На каком расстоянии от того места, где находилась пушка, упал второй осколок.

Решение:

При решении сформулированной задачи часто ошибочно используют закон сохранения импульса, который выполняется только в замкнутых системах. Взрывающееся ядро не может представлять замкнутую систему, поскольку на его движение существенное влияние оказывает Земля. Для решения задачи следует использовать теорему о скорости изменения импульса системы (7.8). С ее помощью легко показать, что во времени сохраняется не весь импульс, а только его проекция на горизонтальную ось (7.9).

$\frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta t} = m\mathbf{g} \Rightarrow \frac{\Delta P_x}{\Delta t} = 0 \Rightarrow P_x = const$	(7.9)	В рассматриваемой системе сохраняется проекция импульса на горизонтальную ось
$P_x(до\ взрыва) = mv_0 \cos\alpha$	(7.10)	Х-проекция импульса ядра с момента выстрела до момента взрыва не изменяется во времени (т.к. сила тяжести направлена перпендикулярно вниз)
$mv_0\cos\alpha = -\frac{1}{2}mv_0\cos\alpha + \frac{1}{2}mu \Rightarrow u = 3v_0\cos\alpha$	(7.11)	После взрыва один из осколков ядра изменяет свою скорость на противоположную, другой - приобретает скорость u.
$L_2 = 3L_1 = \frac{3}{2}\frac{v_0^2}{g}\sin(2\alpha)$	(7.12)	Поскольку времена падения двух осколков равны, а скорости отличаются в 3 раза, горизонтальные отрезки путей , проходимых осколками, отличаются так же в 3 раза.

$L = L_1 + L_2 = 2\frac{v_0^2}{g}\sin(2\alpha)$	(7.13)	Расстояние от пушки до точки падения второго осколка.

Ответ: второй осколок упадет на расстоянии $L = 2\frac{v_0^2}{g}\sin(2\alpha)$ от пушки.

7.4 . Реактивное движение

В соответствии с законами Ньютона для сообщения телу ускорения необходимо действие силы, которая в свою очередь возникает в результате взаимодействия этого тела с другими. Однако на практике иногда возникают задачи изменения скорости движения тела, находящегося в пустом пространстве (например, при движении космического корабля в далеком космосе). В этом случае оказывается возможным сообщить ускорение части тела за счет ее взаимодействия с другими его частями (которые, разумеется, так же приобретают ускорения). Описанный принцип изменения скорости тел, составляющих замкнутую систему, называют реактивным движением. В качестве примера рассчитаем приращение скорости тела Dv массой M (космического корабля) в результате выброса небольшой порции топлива DM, скорость истекания которого относительно космического корабля известна - u. Для этого воспользуемся законом сохранения импульса в предположении, что порция топлива выбрасывается в направлении, противоположном начальной скорости космического корабля v (7.14). В полученном выражении следует пренебречь слагаемым высшего порядка малости (произведение массы выброшенной порции топлива на приращение скорости). В результате получается окончательное выражение (7.15), показывающее, что для лучшего разгона корабля необходимо обеспечение максимальной скорости истекания топлива (т.е. обеспечение максимально возможной температуры его сгорания). Кроме того, исходя из соображений максимальной скорости полета целесообразно увеличивать отношение массы выбрасываемого топлива к массе космического корабля (что, очевидно, противоречит целям большинства запусков космических кораблей).

$Mv = (M - \Delta M)\cdot(v + \Delta v) - \Delta M(u - v)$	(7.14)	Закон сохранения импульса для замкнутой системы "космический корабль + выброшенная порция топлива"
$\Delta v = \frac{\Delta M}{M}u$	(7.15)	Приращение скорости космического корабля.

Пример 7.3. Прыжки солдат с платформы

На неподвижной платформе, способной без трения катиться по горизонтальной поверхности, располагается N одинаковых солдат массой m каждый, способных бегать по платформе с одинаковой скоростью v (скорость относительно платформы!).Солдаты бегут все в одном направлении и спрыгивают с платформы, не изменяя своей скорости в момент прыжка. В каком из двух случаев скорость платформы окажется большей: если солдаты прыгали одновременно или "один за другим".

Решение:

Сложность этой задачи состоит в том, что в случае последовательных прыжков солдат можно получить только рекуррентное соотношение для приращений скорости, а конечное значение скорости платформы представимо только в виде суммы, вычисление которой затруднительно (по чисто математическим причинам). Тем ни менее, ответ на поставленный вопрос может быть дан без выполнения суммирования. (Решение задачи - см. в подборке задач районных и городских олимпиад).

7.5. Короткие удары о шероховатые поверхности

Теорема о скорости изменения импульса системы тел позволяет решать задачи описания движения, сопровождающегося короткими ударами о поверхности при наличии сил сухого трения. При таких ударах скорость движущегося тела изменяется за очень короткий промежуток времени, что, согласно импульсной формулировке второго закона, приводит к возникновению очень больших сил реакции опоры, в свою очередь приводящих к резкому увеличению сил трения в момент удара. Все перечисленные процессы могут быть учтены при решении задач и не требуют использования высшей математики (см. пример 7.4).

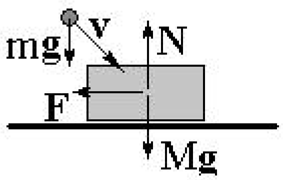
Пример 7.4. Пуля, влетающая в ящик с песком

На горизонтальной шероховатой поверхности (коэффициент трения дан) покоится ящик с песком массой М. В ящик врезается пуля, летевшая со скоростью v под углом а к горизонту. На сколько сдвинется ящик, если пуля застревает в песке, а время торможения в пули очень мало?

Решение:

Задача распадается на две части: анализ процессов, происходящих при торможении поли в ящике, анализ движения ящика по поверхности под воздействием сил трения.

Теорема о скорости изменения импульса системы позволяет не включать в рассмотрение трудно учитываемые силы, возникающие в результате взаимодействия пули с песком (7.16). В рассматриваемом примере ограничимся случаем малых коэффициентов трения, при которых ящик начинает скользить (в противном случае рассмотрение аналогично проделанному в задаче про заклинивание - см. лекцию 5) и сила сухого трения оказывается равной произведению коэффициента трения на величину силы реакции опоры, которая в момент удара оказывается очень большой (7.18). В выражении для импульса ящика после остановки в нем пули (7.19) следует пренебречь только теми слагаемыми, в которых содержатся произведение малого интервала времени на конечные величины (сила реакции опоры в момент короткого удара оказывается очень большой!). Как видно из выражения (7.20), пройденный к моменту остановки пули ящиком путь оказывается бесконечно малым.

 $\frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta t} = m\mathbf{g} + M\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{F}$	(7.16)	Теорема о скорости изменения импульса системы, записанная для конкретной сформулированной в задаче ситуации. В правой части равенства учтены только внешние силы.
$\begin{cases} \frac{MV - mv\cos\alpha}{\Delta t} = -F \\ \frac{0 - (-mv\sin\alpha)}{\Delta t} = N - (M + m)g \end{cases}$	(7.17)	Проекция (7.16) на горизонтальную и вертикальную оси координат.
$F = \mu N = (M + m)g + \frac{mv\sin\alpha}{\Delta t}$	(7.18)	Сила трения, возникающая во время торможения пули в ящике определяется силой реакции опоры, существенно превосходящей по величине силу тяжести.
$MV = mv\cos\alpha - \mu mv\sin\alpha - \mu(m + M)g\Delta t \approx$ $\approx mv(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)$	(7.19)	Импульс, полученный ящиком к моменту остановки в нем пули.
$V = \frac{m}{M}v(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) \Rightarrow \quad L_1 \leq V\Delta t \to 0$	(7.20)	Скорость ящика после остановки в нем пули и оценка пути, проходимого ящиком до этого момента.

Вторая часть задачи о торможении ящика силой трения настолько проста, что должна быть легко решена Вами самостоятельно...

8.1. Механическая работа

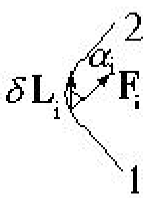
Подавляющее большинство абитуриентов на вступительных экзаменах дает весьма частное определение механической работы, применимое только в случае прямолинейного движения тела под действием постоянной силы , согласно которому (8.1) работа силы F на участке прямолинейной траектории длиной L равна произведению величины силы на величину перемещения и на косинус угла между ними.

В общем случае работу следует определять как сумму элементарных работ на очень малых отрезках траектории (настолько малых, что их можно считать прямолинейными, а действующую на тело силу - постоянной), каждая из которых определяется как скалярное произведение вектора силы на вектор перемещения на указанном малом участке (8.2).

Единицей изменения работы с системе Си является джоуль (Дж) - работа, совершаемая силой в 1Н на отрезке пути в 1м.

Из свойств скалярного произведения двух векторов следует, что работа суммы нескольких сил равна сумме работ каждой из этих сил (8.3). Кроме того, непосредственно из определения следует, что работа на полном участке пути равна сумме работ на каждом из участков.

Если действующая на тела сила "помогает" его движению (т.е. составляет острый угол с направлением движения), то ее работа на рассматриваемом участке оказывается положительной, если "мешает" - отрицательной. Работа силы, направленной перпендикулярно к вектору скорости всегда равна нулю.

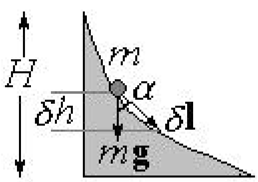
$A \equiv F \cdot L \cdot \cos\alpha$	(8.1)	Определение работы в простейшем случае прямолинейного движения под действием постоянной силы.
 $A \equiv \sum_i \delta A_i \equiv$ $\equiv \sum_i F_i \cdot \delta L_i \cdot \cos\alpha_i =$ $= \sum_i (\mathbf{F}_i, \delta\mathbf{L}_i)$	(8.2)	Определение работы в общем случае.

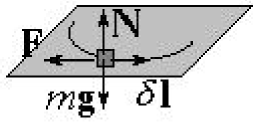
Пример 8.1. Работа силы тяжести и силы трения

- Рассчитать работу силы тяжести при движении тела массой m по заданному участку траектории, на котором высоту расположения тела над поверхностью земли уменьшается на величину H.
- Рассчитать работу силы трения, на пути длиной L, пройденном телом по горизонтальной плоскости, коэффициент трения о поверхность которой известен.

Решение:

Обратите внимание на то, что в рассматриваемых случаях работа силы тяжести не зависит от форму траектории, а работа силы трения определяется длиной траектории и, следовательно, зависит от ее формы. Полученное выражение для работы силы тяжести справедливо только вблизи поверхности Земли, где эта сила остается практически постоянной.

 $\delta A = (m\mathbf{g}, \delta\mathbf{l}) =$ $= mg \cdot \delta l \cos\alpha =$ $= mg \cdot \delta h$	(8.3)	Работа силы тяжести на элементарном участке пути dl.
$A = \sum_i \delta A_i = \sum_i mg \cdot \delta h_i = mg \sum_i \delta h_i = mgH$	(8.4)	Работа силы тяжести на участке траектории произвольной формы.

 $\delta A = (\mathbf{F}, \delta \mathbf{l}) = \mu N \delta l \cdot \cos\pi = -\mu \cdot mg \cdot \delta l$	(8.5)	Работа силы трения на элементарном участке горизонтального пути.
$A = \sum_i -\mu mg \cdot \delta l_i = -\mu mg \sum_i \delta_i = -\mu mgL$	(8.6)	Работа силы трения на горизонтальном участке траектории длиной L.

8.2. Потенциальные и непотенциальные силы

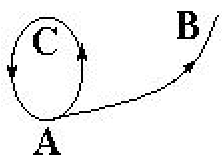
Все встречающиеся в природе силы можно разбить на две большие группы: силы, работа которых при перемещении тела между двумя заданными точками не зависит от формы траектории (такие силы называют потенциальными) и все остальные силы (их называют непотенциальными).

Из определения потенциальных сил и общих свойств работы следует, что работа потенциальных сил по любому замкнутому пути равна нулю.

Действительно, переместим тело из исходной точки в конечную по двум траекториям: содержащей замкнутую петлю и не содержащей ее (8.7). В соответствии с определением потенциальных сил, работа в обоих случаях должна быть одинаковой. С другой стороны, работа потенциальных сил по траектории с замкнутой петлей отличается от работы по коротнкой траектории как раз на величину работы на петле. Таким образом, эта работа оказывается равной нулю.

Так же просто доказываются еще два утверждения (проведите доказательства самостоятельно!):

- · Если работа силы по произвольному замкнутому пути всегда равна нулю, то такая сила является потенциальной.
- · Работы потенциальных сил при перемещении тела между двумя заданными точками в противоположных направлениях равны друг другу по величине и противоположны по знаку.

 $A_{AB} = A_{AC} + A_{CA} + A_{AB}$ $A_{AC} + A_{CA} = 0$	(8.7)	Доказательство равенства нулю работы потенциальных сил по замкнутой траектории.

8.3. Кинетическая энергия. Теорема о кинетической энергии

Кинетической энергией материальной точки называется половина произведения е массы на квадрат скорости (8.8).

В случае произвольного движения может быть доказана важнейшая теорема классической механики (8.9):

Изменение кинетической энергии тела равно работе всех сил, действующих на тело на рассматриваемом участке траектории.

Для успешного ответа на экзамене достаточно уметь доказывать сформулированную теорему хотя бы в частном случае равноускоренного прямолинейного движения, при котором равнодействующая приложенных к телу сил остается постоянной во времени и направлена вдоль траектории. При этом входящая в выражение для изменения кинетической энергии разность квадратов конечной и начальной скоростей (8.10), просто выражается через ускорение тела и его перемещение, а произведение постоянной равнодействующей силы на перемещение тела оказывается равным суммарной работе всех сил.

Как уже отмечалось, теорема о кинетической энергии справедлива в случае произвольного движения тел под действием произвольно направленных сил, произвольно изменяющихся во времени. Для доказательства общего случая необходимо рассмотреть изменение кинетической энергии на бесконечно малом отрезке траектории (8.11), для которого выполняется сформулированное утверждение. Суммирование соответствующих равенств по всем элементарным участкам полной траектории (8.12) приводит к ожидаемому результату. Эта теорема часто позволяет просто решать многие задачи механики в тех случаях, когда прямой расчет движения на основе законов Ньютона оказывается трудновыполнимым (например, в случае движения под действием изменяющихся сил).

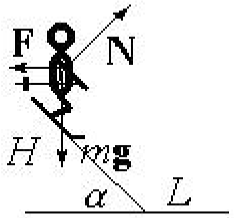
$K \equiv \frac{1}{2}mv^2$	(8.8)	Определение кинетической энергии материальной точки.
$\Delta K = A_{12}^{(всех\ сил)}$	(8.9)	Теорема о кинетической энергии.
$\Delta K \equiv K_2 - K_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = m\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} =$ $= ma \cdot \Delta L = F \cdot \Delta L = A_{12}^{(всех\ сил)}$	(8.10)	Доказательство теоремы об изменении кинетической энергии в частном случае прямолинейного равноускоренного движения тела.
$\delta K = \frac{1}{2}m(\mathbf{v} + \delta\mathbf{v})^2 - \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 =$ $= \frac{1}{2}m\left(\mathbf{v}^2 + 2(\mathbf{v}, \delta\mathbf{v}) + (\delta\mathbf{v})^2 - \mathbf{v}^2\right) \approx$ $\approx m(\mathbf{v}, \delta\mathbf{v}) = \left(\mathbf{v}\delta t, m\frac{\delta\mathbf{v}}{\delta t}\right) = (m\mathbf{a}, \delta\mathbf{l}) =$ $= (\mathbf{F}, \delta\mathbf{l}) = \delta A$	(8.11)	Доказательство теоремы о кинетической энергии в общем случае для перемещения тела по бесконечно-малому отрезку пути, для которого оправдано пренебрежение квадратом приращения скорости - величиной "более высокого порядка малости".
$\Delta K = (K_2 - K_1) + (K_3 - K_2) + \ldots =$ $= \delta K_1 + \delta K_2 + \ldots = \delta A_1 + \delta A_2 + \ldots = \Delta A$	(8.12)	Суммирование результатов (8.10), приводящее к доказательству теоремы о изменении кинетической энергии в общем случае

Пример 8.2. Лыжник на ровной горке

Лыжник стартует без начальной скорости с вершины ровной горы высотой *H*, составляющей заданный угол с горизонталью. На каком расстоянии от окончания склона он остановится? Коэффициент трения о снег известен и постоянен. Сопротивлением воздуха принебречь. Переход от наклонного участка к горизонтальному происходит без удара.

Решение:

Задача может быть решена, исходя из законов Ньютона и формул равноускоренного движения. Однако, использование теоремы о кинетической энергии позволяет получить ответ гораздо быстрее… Интересно, что получаемый ответ оказывается не зависящим от массы лыжника, что противоречит многочисленным наблюдениям. Кажущееся противоречие связано с том, что в приводимом решении не учитывается сила сопротивления воздуха.

 $N = mg \cdot \cos\alpha$ $F = \mu \cdot mg \cdot \cos\alpha$	(8.13)	Вычисление силы трения на наклонном участке траектории. На горизонтальном участке косинус угла наклона траектории следует считать равным единице.
$K_2 - K_1 = 0 - 0 = A_{mg} + A_F + A_N$	(8.14)	Теорема о изменении кинетической энергии.

$\delta A_N = N\cdot\delta l\cdot\cos(\pi/2) = 0 \;\Rightarrow\; A_N = 0$ $A_{mg} = mgH$ $A_F = -\mu mg\cos\alpha\cdot\dfrac{H}{\sin\alpha} - \mu mgL$	(8.15)	Работы сил, действующих на лыжника.
$0 = mgH - \mu mg\cos\alpha\cdot\dfrac{H}{\sin\alpha} - \mu mgL \;\Rightarrow$ $L = H\left(\dfrac{1}{\mu} - ctg\alpha\right)$	(8.16)	Путь по горизонтальному участку до остановки лыжника.
$L > 0 \;\Rightarrow\; tg\alpha > \mu$	(8.17)	Условие скатывания лыжника по склону.

Ответ: если $tg\alpha > \mu$, лыжник по горизонтальному участку проедет путь, равный $L = H\left(\dfrac{1}{\mu} - ctg\alpha\right)$. В противном случае лыжник не покатится вниз по склону.

8.4. Потенциальная энергия. Механическая энергия. Теорема о изменении механической энергии

Корректное определение потенциальной и механической энергии обычно вызывает серьезные трудности у учащихся на экзаменах. Например, часто встречающееся утверждение о том, что "потенциальная энергия всегда равна mgh" не является правильным, поскольку касается только частного случая потенциальной энергии тела в однородном поле сил тяжести (то есть вблизи поверхности Земли).

Потенциальной энергией тела в заданной точке пространства называется работа потенциальных сил по перемещению этого тела из заданной точки пространства в "начальную" точку, где величина потенциальной энергии принята равной нулю (8.18).

Очевидно, что определенная таким образом потенциальная энергия не зависит от выбора траектории перемещения тела, но зависит от выбора начальной точки. Возникшая неоднозначность не является принципиальной. Во все уравнения физики входит не сама потенциальная энергия, а ее приращение (разность энергий в начальной и конечной точках). Приращение потенциальной энергии не зависит от выбора нулевого уровня.

Используя определение потенциальной энергии (8.18), легко рассчитать ее значения в важных случаях движения тел под действием одних только сил тяжести (8.19) и сил упругости (8.20).

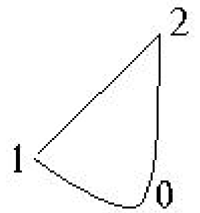
Во многих важных случаях оказывается, что сума кинетической и потенциальной энергии тела не изменяется во времени. Это делает оправданным введение новой величины - полной механической энергии (8.21):

Полной механической энергией тела в данной точке пространства называется сумма его кинетической и потенциальной энергий.

Исходя из теоремы об изменении кинетической энергии, легко получить эквивалентную ей теорему об изменении механической энергии (8.22):

Изменение механической энергии тела равно работе непотенциальных сил.

Для доказательства этой теоремы достаточно воспользоваться теоремой об изменении кинетической энергии (8.9), в которой работы всех сил следует представить в виде суммы работ потенциальных и непотенциальных сил (8.23). Выбрав положение нулевой точки, выделенную работу потенциальных сил можно выразить через изменение потенциальной энергии (8.24). Подстановка полученного результата в выражение для изменения кинетической энергии приводит к требуемому ответу (8.25)

$U(\mathbf{r}) \equiv A_{\mathbf{r}\to 0}^{(\text{пот})}$	(8.18)	Определение потенциальной энергии тела в точке, характеризуемой радиус-вектором **r**.
$U(h) = mgh$	(8.19)	Потенциальная энергия тела на небольшой высоте h над поверхностью Земли (за 0 выбрана энергия на поверхности Земли).
$U(x) = \dfrac{kx^2}{2}$	(8.20)	Потенциальная энергия тела, прикрепленного к деформированной на величину X пружине (за 0 выбрана энергия в положении, соответствующем недеформированной пружине).
$W(\mathbf{r}) \equiv K + U(\mathbf{r})$	(8.21)	Полная механическая энергия тела в точке, характеризуемой радиус-вектором **r**.
$\Delta W = A^{(\text{непот.сил})}$	(8.22)	Теорема о изменении механической энергии.
$K_2 - K_1 = A_{12}^{(\text{пот.})} + A_{12}^{(\text{непот.})}$	(8.23)	Теорема о кинетической энергии.
 $A_{12}^{(\text{пот})} = A_{10}^{(\text{пот})} + A_{02}^{(\text{пот})} = A_{10}^{(\text{пот})} - A_{20}^{(\text{пот})} = U(1) - U(2) = -\Delta U$	(8.24)	Связь изменения потенциальной энергии с работой потенциальных сил.
$\Delta K = -\Delta U + A_{12}^{(\text{непот})} \Rightarrow \Delta W = \Delta(K+U) = A_{12}^{(\text{непот})}$	(8.25)	Доказательство теоремы об изменении механической энергии.

8.5. Мощность

Мощностью называется работа, производимая силой за единицу времени (8.26). Единицей измерения мощности в системе единиц Си является ватт (вт) - мощность силы, производящей за 1 с работу, равную 1 Дж.

Исходя из определения работы на малом участке пути, нетрудно показать, что мощность равна скалярному произведению силы на скорость (8.27).

$N \equiv \left.\dfrac{\delta F}{\delta t}\right\|_{\delta t\to 0}, \quad [N] = вт = \dfrac{Дж}{с}$	(8.26)	Определение мощности.
$\delta A = (\mathbf{F}, \delta\mathbf{l}) \Rightarrow N = \left(\mathbf{F}, \dfrac{\delta\mathbf{l}}{\delta t}\right) = (\mathbf{F}, \mathbf{v})$	(8.27)	Выражение мощности через силу и скорость.

Пример 8.3. Мощность мотора вертолета

С какой постоянной скоростью движется вертолет массой *M* в вертикальном направлении если известно, что его двигатели развивают мощность, равную *N*? Сила сопротивления воздуха движению аппарата дается соотношением $\mathbf{f} = -\eta\mathbf{v}$? (Коэффициент вязкого трения известен).

Решение:

$0 = M\mathbf{a} = M\mathbf{g} + \mathbf{F} + \mathbf{f}$	(8.28)	Условие установившегося движения вертолета.
$\left[\begin{array}{ll} 0 = F - Mg - \eta v & (F > mg) \\ 0 = F - Mg + \eta v & (F < Mg) \end{array}\right.$	(8.29)	Результат проектирования (8.28) на вертикальную ось для случаев подъема и спуска вертолета.

$$\left[\begin{array}{l} 0 = N - Mgv - \eta v^2 \\ 0 = N - Mgv + \eta v^2 \end{array}\right.$$	(8.30)	Результат домножения (8.29) на скорость вертолета.
$$\left[\begin{array}{l} v = -\dfrac{Mg}{2\eta} + \sqrt{\left(\dfrac{Mg}{2\eta}\right)^2 + \dfrac{N}{\eta}} \\ v = \dfrac{Mg}{2\eta} \pm \sqrt{\left(\dfrac{Mg}{2\eta}\right)^2 - \dfrac{N}{\eta}} \end{array}\right.$$	(8.31)	Возможные значения установившихся скоростей подъема и спуска вертолета. В случае подъема только один корень уравнения имеет смысл, при спуске - теоретически возможны два значения установившейся скорости

9.1. Закон сохранения механической энергии

Из теоремы об изменении механической энергии системы следует, что в случае отсутствия в механической системе непотенциальных сил полная механическая энергия каждого из тел, составляющих систему, сохраняется во времени. Очевидно, что в этом случае полная механическая энергия системы, определяемая как сумма механических энергий всех составляющих систему материальных точек, сохраняется во времени.

Системы, в которых действуют только потенциальные силы, называются потенциальными (иногда их называют консервативными). В потенциальных системах полная механическая энергия сохраняется.

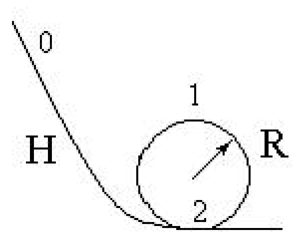
Иногда на экзаменах учащиеся утверждают, что полная механическая энергия сохраняется в замкнутых системах. Указанное утверждение не является верным, поскольку механическая энергия в замкнутых системах может переходить в другие формы: тепловую, электрическую, магнитную и т.д. ***В замкнутых системах сохраняется не механическая, а полная энергия.***

$\mathbf{F}_{\Sigma}^{(\text{непот})} = 0 \quad \Rightarrow \quad K + U = W = const$	(9.1)	Закон сохранения механической энергии

Пример 9.1. "Мертвая петля"

С какой начальной высоты нужно запустить тележку для того, чтобы она преодолела "мертвую петлю" радиусом R? Найти величину перегрузки в нижней точке "мертвой петли". Трением и сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение:

 $m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{N}$	(9.2)	Второй закон Ньютона для тележки в произвольной точке траектории
$m\dfrac{v_1^2}{R} = mg + N_1 \geq mg$	(9.3)	Условие прохождения тележкой "самой опасной" точки траектории в вершине мертвой петли.
$m\dfrac{v_{1\min}^2}{2} = \dfrac{1}{2}mgR$	(9.4)	Минимальная кинетическая энергия тела в верхней точке мертвой петли.
$mgH_{\min} = mg2R + \dfrac{mv_{1\min}^2}{2} = \dfrac{5}{2}mgR \quad \Rightarrow \quad H_{\min} = \dfrac{5}{2}R$	(9.5)	Закон сохранения механической энергии и минимальная высота старта тележки.
$m\dfrac{v_2^2}{R} = -mg + N_2 \quad \Rightarrow \quad N_2 = mg + m\dfrac{v_2^2}{R}$	(9.6)	Результат проектирования не вертикальную ось уравнения (9.2),

		примененного к телу в точке 2.
$m\frac{v_2^2}{2}=mgH=\frac{5}{2}mgR \Rightarrow m\frac{v_2^2}{R}=5mg$	(9.7)	Использование закона сохранения энергии для нахождения скорости тела в нижней точке траектории.
$N_2=6mg \Rightarrow \frac{N_2}{mg}=6$	(9.8)	Перегрузка, соответствующая минимальной высоте, обеспечивающей прохождение тележкой "мертвой петли"

Ответ: для прохождения "мертвой петли" тележку следует запустить с высоты *5/2R*. При этом в нижней точке траектории возникнет шестикратная перегрузка.

9.2. Упругие столкновения

Упругим столкновением называется процесс взаимодействия первоначально удаленных друг от друга тел, в результате которого тела вновь оказываются на большом удалении друг от друга, а полная механическая энергия системы при этом сохраняется.

Для описания упругих столкновений, как это следует из определения, может использоваться закон сохранения механической энергии, однако одного равенства оказывается недостаточно для нахождения скоростей разлетающихся тел даже в том случае, когда для их описания используется модель материальной точки. В большинстве задач на упругий удар система двух взаимодействующих друг с другом тел может рассматриваться как замкнутая, что позволяет дополнить уравнение, выражающее закон сохранения энергии, еще одним равенством, соответствующем закону сохранения импульса (9.9). Наиболее простым случаем упругого столкновения двух материальных точек является лобовой удар, при котором скорости слетающихся и разлетающихся тел направлены вдоль одной и той же прямой.

$\begin{cases}\frac{mv^2}{2}+\frac{MV^2}{2}=\frac{mu^2}{2}+\frac{MU^2}{2}\\ m\mathbf{v}+M\mathbf{V}=m\mathbf{u}+M\mathbf{U}\end{cases}$	(9.9)	Система уравнений, описывающих упругое столкновение двух точечных тел, составляющих замкнутую систему. **V** и **v** -скорости тел до столкновения, **U** и **u** - скорости после столкновения.

Пример 9.2. Космическая катастрофа

Очень большой метеорит массой *M* упруго сталкивается с очень маленькой космической станцией. Жертв и разрушений нет (поскольку удар абсолютно упругий). Найти скорости тел после столкновения с точки зрения наблюдателя, относительно которого космическая станция первоначально покоилась, а метеорит летел со скоростью *V*. Удар считать лобовым.

Решение:

При решении данной задачи с использованием законов сохранения возникает два принципиально отличающихся друг от друга результата. Один соответствует движению невзаимодействующих друг с другом тел (при таком движении и энергия и импульс сохраняются во времени!). Другой - описывает столкновение, сопровождающееся передачей энергии и импульса.

В случае столкновения массивного тела с покоившимся телом гораздо меньшей массы, первое из тел продолжает свое движения практически без изменения скорости, а второе - улетает вперед со в два раза большей скоростью (9.15). Этот, на первый взгляд несколько неожиданный результат, можно получить практически устно, решая задачу с точки зрения наблюдателя, находящегося в почти инерциальной системе отсчета, связанной с массивным телом.

$\begin{cases} MV = mu + MU \\ \dfrac{MV^2}{2} = \dfrac{mu^2}{2} + \dfrac{MU^2}{2} \end{cases}$	(9.10)	Законы сохранения импульса и энергии в совокупности дают два уравнения для определения скоростей тел после столкновений.
$\begin{cases} M(V-U)(V+U) = mu^2 \\ M(V-U) = mu \end{cases}$	(9.11)	Более удобная форма системы (9.10).
$\begin{cases} U = V \\ v = 0 \end{cases}$	(9.12)	Обращающее систему (9.10) в тождество, но не соответствующее условию задачи решение, описывающее случай пролета тел без взаимодействия друг с другом.
$\begin{cases} U \neq V \\ v \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V + U = u \\ M(V-U) = m(V+U) \end{cases}$	(9.13)	Результат деления уравнений (9.11) одно на другое.
$\begin{cases} U = \dfrac{M-m}{M+m}V \\ u = \dfrac{2M}{M+m}V \end{cases}$	(9.14)	Точное решение задачи от упругом лобовом столкновении двух тел с произвольным соотношением масс в системе отсчета, где одно их тел первоначально покоилось.
$M >> m \Rightarrow \begin{cases} U \approx V \\ u \approx 2V \end{cases}$	(9.15)	Приближенное решение для случая столкновения тел с сильно различающимися массами.

Ответ: после столкновения метеорит будет продолжать двигаться с практически такой же скоростью, а космическая станция полетит аперед с вдвое большей скоростью, чем метеорит.

9.3. Очень нетривиальная задача на закон сохранения энергии

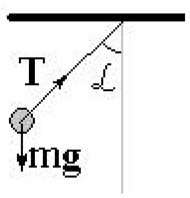
Подавляющее большинство конкурсных задач по механики подразумевают использование законов сохранения энергии и импульса в сочетании с законами Ньютона или какими-либо другими идеями физики. В качестве примера рассмотрите задачу, предлагавшуюся на письменных вступительных экзаменах по физике в СПбГУ в 80-х годах 20 века.

Пример 9.3. Груз на невесомой и нерастяжимой нити

Груз массой *m* подвешен на невесомой и нерастяжимой нити длиной *L*. В начальный момент нить была натянута и располагалась горизонтально. Груз отпускают без начальной скорости. В тот момент, когда груз пересекает вертикаль, проходящий через точку закрепления нити, горизонтальная составляющая его скорости имела величину *u*. Найти максимальное натяжение, испытанное нитью.

Решение:

На первый взгляд кажется, что задача является "переопределенной": скорость в нижней точке траектории может быть легко определена, исходя из закона сохранения энергии. Однако, в случае указания в условии задачи какого-либо набора заданных параметров, необходимо исследовать решение задачи при всех возможных сочетаниях заданных параметров. Так, можно представить себе ситуацию, при которой заданная горизонтальная составляющая скорости u окажется меньше рассчитанного с использованием закона сохранения энергии значения из-за того, что невесомая нерастяжимая нить может … разорваться! Очевидно, что после разрыва нити груз будет двигаться по параболической траектории, при этом горизонтальная составляющая скорости груза не будет изменяться во времени.

$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{T} \Rightarrow$ $m\dfrac{v^2}{L} = -mg \cdot \cos\alpha + T$		(9.16)	Второй закон Ньютона для груза, движущегося на невесомой нерастяжимой нити.

$mgL = \frac{mv^2}{2} + mgL\cdot(1-\cos\alpha) \quad\Rightarrow$ $m\frac{v^2}{L} = 2mg\cdot\cos\alpha$	(9.17)	Вычисление скорости груза в заданной точке траектории с помощью закона сохранения энергии.
$T = m\frac{v^2}{L} + mg\cdot\cos\alpha = 3mg\cdot\cos\alpha$	(9.18)	Сила натяжения нити в тот момент, когда она составляет угол a с вертикалью: при уменьшении угла сила натяжения возрастает.
$\cos\alpha_0 = \frac{u}{v} = \frac{u}{\sqrt{2gL\cos\alpha_0}} \quad\Rightarrow\quad \cos\alpha_0 = \sqrt[3]{\frac{u^2}{2gL}}$	(9.19)	Угол, соответствующий разрыву нити.
$T_{MAX} = 3mg\cdot\sqrt[3]{\frac{u^2}{2gL}}$	(9.20)	Максимальная сила натяжения нити.

9.4. Парадокс кинетической энергии

В соответствии с принципом относительности Галилея, любую задачу механики можно решать в любой инерциальной системе отсчета, независимо от скорости ее движения. В связи с этим представляет интерес рассмотрение следующего кажущегося парадокса, связанного с изменением кинетической энергии при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую.

Рассчитаем конечную скорость заводного автомобильчика массой m, пружинка которого жесткости *k* деформирована на величину *Dx*, если тепловые потери энергии отсутствуют, в той системе отсчета, где автомобиль первоначально покоился. Закон сохранения энергии в этом случае имеет вид (9.21) и позволяет легко найти конечную скорость движения автомобиля. Совершенно неожиданным кажется тот факт, что аналогичное решение задачи с точки зрения наблюдателя, бегущего навстречу автомобильчику со скоростью *v*, приводит к ответу, отличающемуся от ранее полученного в корень из трех раз (9.22).

Разрешение кажущегося парадокса состоит в том, что оба приведенные варианта решения (9.21) и (9.22) не являются точными, поскольку в них не учитывалось движение Земли, вызванное взаимодействием с колесами автомобиля. Т.о. системы отсчета, связанные с Землей и равномерно бегущим по ее поверхности наблюдателем не являются инерциальными. Если решать задачу с точки зрения наблюдателей, находящихся в истинно инерциальных системах отсчета, никаких противоречий не возникает.

$k\frac{\Delta x^2}{2} = m\frac{v^2}{2} \quad\Rightarrow\quad v = \sqrt{\frac{k}{m}}\Delta x$	(9.21)	Решение задачи о заводном автомобильчике в неподвижной системе отсчета.
$k\frac{\Delta x^2}{2} + m\frac{v^2}{2} = m\frac{(2v)^2}{2} \quad\Rightarrow\quad v = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{k}{m}}\Delta x$	(9.22)	Решение задачи о заводном автомобильчике в движущейся системе отсчета